Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

14. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x + y + z$ hármasintegrálját a

$$D = \{(x,y,z) \mid x,y,z > 0,\ x+y+z < 1\}$$

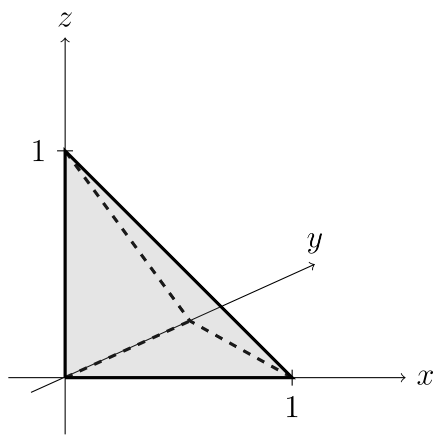
tartományon!

Megoldás. Az alábbi integrált kell kiszámítanunk:

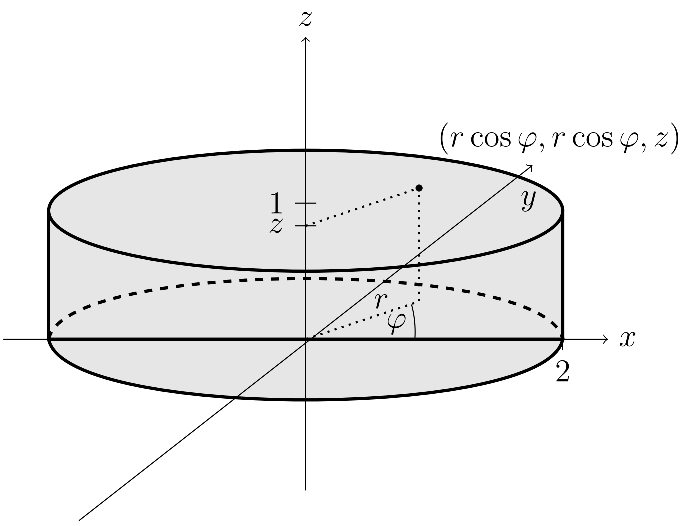
$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (x+y+z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z.$$

Belülről kifelé haladunk az integrálok kiszámításával, pont mint a kettősintegrálok esetében.

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} (x+y+z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{1-z} \left[\frac{x^2}{2} + yx + zx\right]_0^{1-y-z} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$
$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \left(-\frac{y^2}{2} - yz - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \left[-\frac{y^3}{6} - \frac{y^2 z}{2} - \frac{z^2 y}{2} + \frac{y}{2}\right]_0^{1-z} \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} + \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}z = \left[\frac{z^4}{24} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$



1. ábra. Integrálási tartomány az 1. feladatnál.



2. ábra. Hengerkoordináták.

2. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}$ hármasintegrálját a

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

tartományon!

Megoldás. Helyettesítéses integrálással fogjuk ezt a feladatot megoldani. Mivel a tartományunk egy henger, alkalmazzunk hengerkoordinátákat! Azaz legyen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z, \end{aligned}$$

ahol r a z tengelytől mért távolság (tehát most 0 és 2 között fog változni), φ az x tengelytől mért elfordulás szöge az xy síkban (tehát most 0 és 2π között fog változni), z pedig a magasság (tehát most 0 és 1 között fog változni).

Tehát legyen $g(r,\varphi,z) = (g_1(r,\varphi,z), g_2(r,\varphi,z), g_3(r,\varphi,z)) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Így

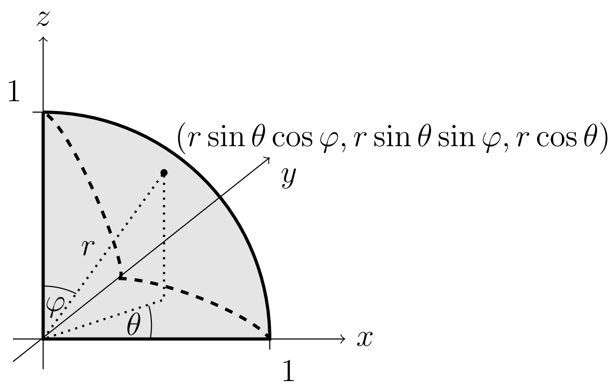
$$\iiint_D f\ \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot |\det g'|\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}z,$$

ahol g' az alábbi mátrix:

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial_r} & \frac{\partial g_1}{\partial_\varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial_z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial_r} & \frac{\partial g_2}{\partial_\varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial_z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial_r} & \frac{\partial g_3}{\partial_\varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kiszámítható, hogy $\det g' = r$. Így az integrálunk:

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \cdot r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} e^{r^2} \cdot r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \int_0^2 2\pi r e^{r^2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}z = \int_0^2 2\pi r e^{r^2}\ \mathrm{d}r \cdot \int_0^1 1\ \mathrm{d}z = \pi \left[e^{r^2}\right]_0^2 = \pi\left(e^4-1\right).$$



3. ábra. Gömbi koordináták.

3. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = xyz$ hármasintegrálját a

$$D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y,z > 0\}$$

tartományon!

Megoldás. Helyettesítéses integrálással fogjuk ezt a feladatot megoldani. Mivel a tartományunk egy gömb nyolcada, alkalmazzunk gömbi koordinátákat! Azaz legyen

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

ahol r az origótól mért távolság (tehát most 0 és 1 között fog változni), φ a z tengelytől mért elfordulás szöge az xy síkra merőlegesen (tehát most 0 és $\frac{\pi}{2}$ között fog változni), θ pedig az x tengelytől mért elfordulás szöge az xy síkban (tehát most 0 és $\frac{\pi}{2}$ között fog változni).

Tehát legyen

$$g(r,\varphi,\theta) = (g_1(r,\varphi,\theta), g_2(r,\varphi,\theta), g_3(r,\varphi,\theta)) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Így

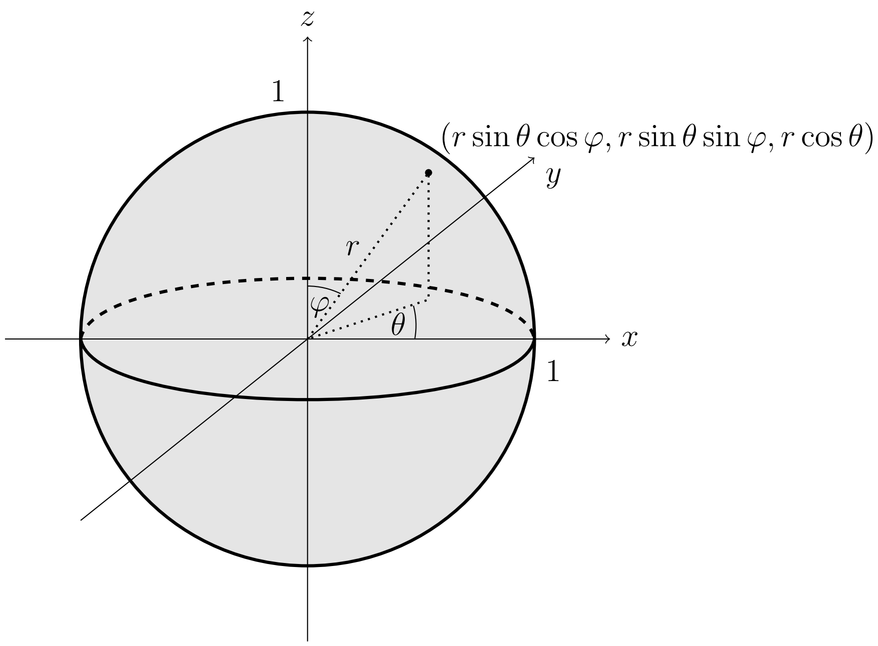
$$\iiint_D f \,\mathrm{d}V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot|\det g'| \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta,$$

ahol g' az alábbi mátrix:

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial_r} & \frac{\partial g_1}{\partial_\varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial_\theta} \\ \frac{\partial g_2}{\partial_r} & \frac{\partial g_2}{\partial_\varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial_\theta} \\ \frac{\partial g_3}{\partial_r} & \frac{\partial g_3}{\partial_\varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial_\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

Kiszámítható, hogy $\det g' = r^2\sin\theta$. Tehát az integrálunk:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^5\sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$



4. ábra. Gömbi koordináták.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{12}\left[\frac{\sin^4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{48}.$$

4. Tekintsük a $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ tartományt az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sűrűségfüggvénnyel.

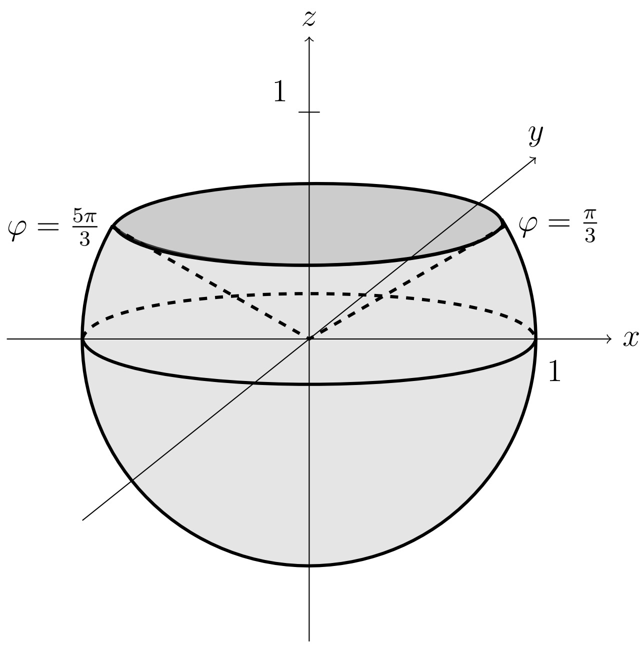
   (a) Határozzuk meg D tömegét!

   (b) Kivágunk a gömbből egy origó középpontú, 120°-os nyílásszögű gömbcikket. Határozzuk meg a gömbcikk és a maradék tömegét!

Megoldás.

(a) A tömeget úgy kapjuk meg, ha a sűrűségfüggvényt kiintegráljuk a tartományon. Alkalmazzunk gömbi koordinátákat! Vegyük észre, hogy ha φ a 0 és 2π értékek között változik, akkor θ értékének 0 és π között kell változnia.

$$M = \iiint_D f \, \mathrm{d}V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \cdot r^2\sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \pi.$$



5. ábra. Integrálási tartomány a 4 (b) feladatnál.

(b) Számoljuk ki a maradék rész tömegét! Most $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$. Tehát a tömeg:

$$M_1 = \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \int_0^1 r \cdot r^2 \sin\theta \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin\theta \; \mathrm{d}\varphi \; \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin\theta \; \mathrm{d}\theta \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Így a a gömbcikk tömege
$$M_2 = M - M_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi hármasintegrálokat!

   (a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}z$

   (b) $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x \; \mathrm{d}z \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x$

   (c) $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1} \; \mathrm{d}p \; \mathrm{d}q \; \mathrm{d}r$

   Eredmények.

   (a) 1

   (b) $\frac{1}{12}$

   (c) $8 \ln 2$

2. Határozzuk meg $\iiint_D f \; \mathrm{d}V$ értékét!

   (a) $f(x, y, z) = x^2$, $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, \; 1 \leq z \leq 2\}$

(b) $f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$

Eredmények.

(a) $\frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{4\pi}{3}(e^{27}-1)$