Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

13. Gyakorlat megoldásai

1. Térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az alábbi integrálokat!

   (a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \text{ d}y \text{ d}x$

   (b) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2+1) \text{ d}x \text{ d}y$

   Megoldás. A következőképpen lehet helyettesítéses integrálást végezni kettősintegrálok esetében:

$$\iint\limits_T f(x,y) \text{ d}x \text{ d}y = \iint\limits_{g^{-1}(T)} f(g_1(u,v), g_2(u,v)) |\det g'(u,v)| \text{ d}x \text{ d}y,$$

ahol $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés $g^{-1}(T)$ és T között. Ebben az esetben g' a következő 2×2 mátrix (neve Jacobi-mátrix):

$$g'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}.$$

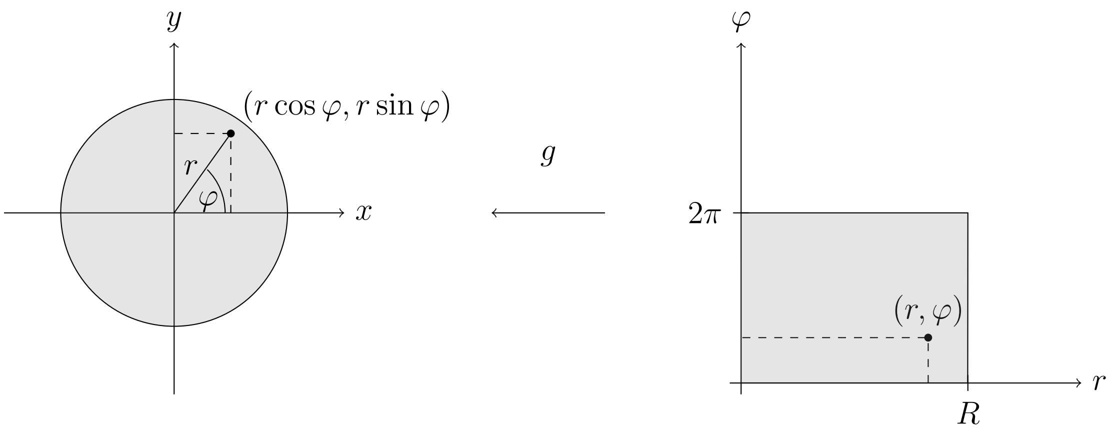
Ennek speciális esete a polárkoordinátás helyettesítés. Legyen T az origó középpontú R sugarú körlap. Használjuk most az r betűt u helyett és a φ betűt v helyett. Legyen $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Könnyű látni az 1. ábra segítségével, hogy ha r befutja a $[0,R]$ intervallumot, φ pedig a $[0,2\pi]$ intervallumot, akkor g előállítja a körlap minden pontját (pontosan egyszer) – hiszen a téglalap (r,φ) koordinátájú pontja egyértelműen megfelel a körlap azon pontjának amelynek a távolsága az origótól r, az elfordulásának szöge pedig φ, és ezt a megfeleltetést éppen a g függvény adja meg.

Mivel

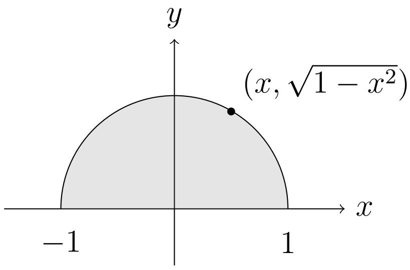
$$\det g'(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r,$$

a helyettesítéses integrálás a következőképpen alakul:

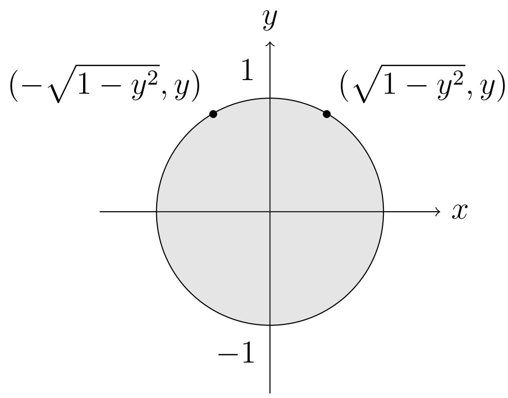
$$\iint\limits_T f(x,y) \text{ d}x \text{ d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \text{ d}\varphi \text{ d}r.$$



1. ábra. Polárkoordinátás helyettesítés.



(a) Integrálási tartomány az 1. (a) feladatnál.



(b) Integrálási tartomány az 1. (b) feladatnál.

2. ábra. Ábrák az 1. feladathoz.

(a) Ebben az esetben a felső félkörlapon integrálunk, tehát az elfordulási szög csak 0 és π között változik, lásd a 2. ábrát. Valamint, $R = 1$.

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^\pi r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1 [r\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = \pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

.

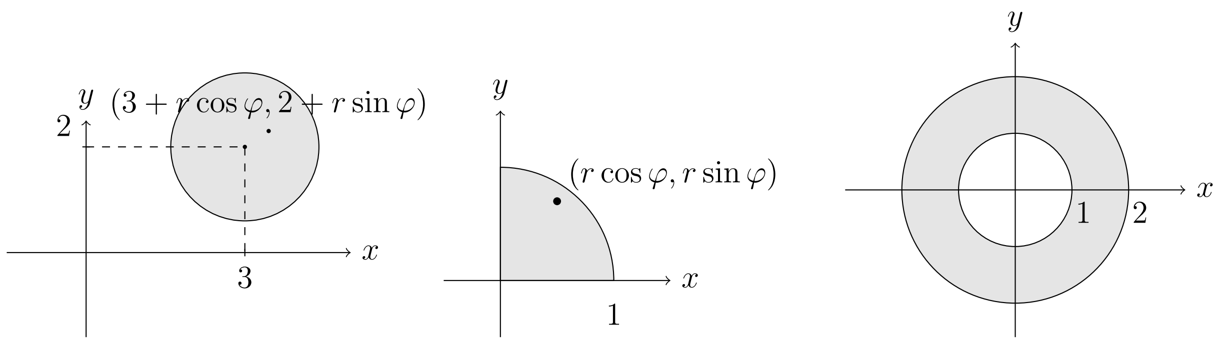
(b) $R = 1$ megint, és most a teljes körlapon integrálunk. Vegyük észre, hogy $x^2+y^2 = r^2$.

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi}\cos(r^2+1)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1 [(\cos(r^2+1)r)\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 \cos(r^2+1)r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{\sin(r^2+1)}{2}\right]_{r=0}^{1}$$

$$= \pi(\sin 2 - \sin 1)$$

2. Számítsuk ki az $\iint_T f\,\mathrm{d}A$ integrált!



(a) Integrálási tartomány a 2. (a) feladatnál.

(b) Integrálási tartomány a 2. (b) feladatnál.

(c) Integrálási tartomány a 2. (c) feladatnál.

3. ábra. Ábrák a 2. feladathoz.

(a) $T = \{(x, y) | (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 2\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $T = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}, \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

(c) $T = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

Megoldás.

(a) Mivel T középpontja $(3, 2)$, így $g(r, \varphi) = (3 + r\cos\varphi, 2 + r\sin\varphi)$ fogja az $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ téglalapot a T körlapra képezni.

$$\iint\limits_T f \ \mathrm{d}A = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (3 + r\cos\varphi)^2 + (2 + r\sin\varphi)^2 \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 13 + r^2 + 2r(3\cos\varphi + 2\sin\varphi) \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r$$
$$= \int_0^{\sqrt{2}} [(13 + r^2)\varphi + 2r(3\sin\varphi - 2\cos\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} \ \mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi(13 + r^2) \ \mathrm{d}r$$
$$= 2\pi \left(13\sqrt{2} + \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{\sqrt{2}} \right) = \frac{82\sqrt{2}\pi}{3}$$

(b) A pozitív síknegyedbe eső negyedkörlapon kell integrálnunk, ezért az elfordulás szöge 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eshet, valamint $R = 1$.

$$\iint\limits_T f \ \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r^3\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r\cos\varphi\sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r =$$
$$\int_0^1 r \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r \ \mathrm{d}r = [\sin^2\varphi]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}$$

(c)

$$\iint\limits_T f \ \mathrm{d}A = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \ln(r^2) r \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r = \pi \int_1^2 \ln(r^2) 2r \ \mathrm{d}r$$

Emlékezzünk, hogy

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x(\ln x - 1),$$

tehát

$$\pi \int_1^2 \ln(r^2) 2r \, \mathrm{d}r = \pi r^2(\ln(r^2) - 1).$$

3. Számítsuk ki a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

integrált!

Megoldás.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + r^2)^2} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{2r}{(1 + r^2)^2} \, \mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi}{4} \lim_{c \to \infty} [-(1 + r^2)^{-1}]_0^c = \frac{\pi}{4} \lim_{c \to \infty} \left(1 - \frac{1}{(1 + c^2)^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4. Határozzuk meg az $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ felület xy sík feletti részének felszínét!

Megoldás. A felszín az alábbi képlettel számítható:

$$F = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, \mathrm{d}A,$$

ahol f'_x, f'_y a parciális deriváltakat jelölik. Tehát jelen esetben

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x,$$
$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

A felület pontosan akkor van az xy-sík felett, ha $z \geq 0$, azaz $1 \geq x^2 + y^2$. Így a T integrálási tartományunk az origó középpontú egységkörlap. Tehát polárkoordinátás helyettesítést alkalmazva:

$$F = \iint_T \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{(1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12} \right]_{r=0}^1$$
$$= \frac{(\sqrt{125} - 1)\pi}{6}.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Számítsuk ki az $\iint_T f \, \mathrm{d}A$ integrált!

$$T = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \; f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$$

Eredmény. $e\pi(e^{15} - 1)$

2. Határozzuk meg a $z = 1 - 2x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része és az xy-sík által határolt térrész térfogatát!

   Eredmény. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

3. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy$, $T = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ felület felszínét!

   Eredmény. $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$