# Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

# 13. Gyakorlat megoldásai

1. Térjünk át polárkoordinátákra, és számítsuk ki az alábbi integrálokat!

   (a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

   (b) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2 + 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

   **Megoldás.** A következőképpen lehet helyettesítéses integrálást végezni kettősintegrálok esetében:

$$\iint\limits_{T} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{g^{-1}(T)} f(g_1(u,v), g_2(u,v)) |\det g'(u,v)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

ahol $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés $g^{-1}(T)$ és $T$ között. Ebben az esetben $g'$ a következő $2 \times 2$ mátrix (neve Jacobi-mátrix):

$$g'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}.$$

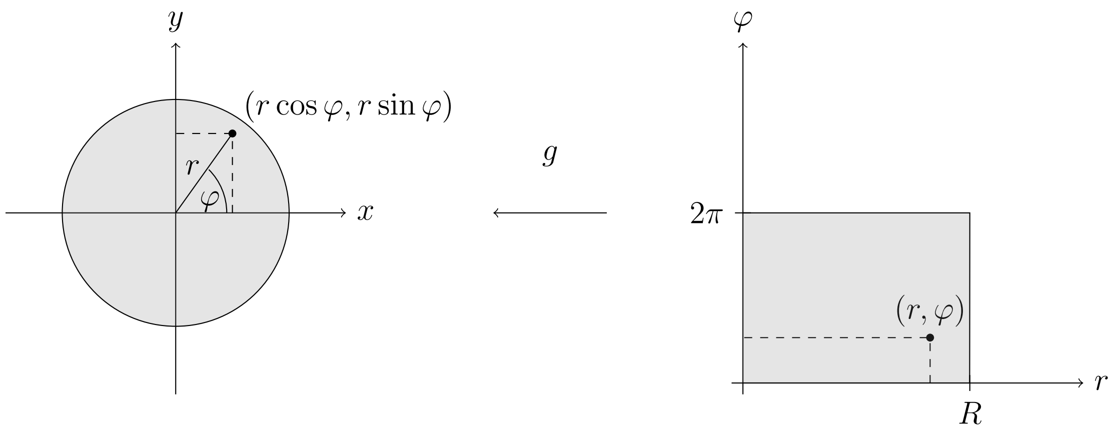
Ennek speciális esete a polárkoordinátás helyettesítés. Legyen $T$ az origó középpontú $R$ sugarú körlap. Használjuk most az $r$ betűt $u$ helyett és a $\varphi$ betűt $v$ helyett. Legyen $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Könnyű látni az 1. ábra segítségével, hogy ha $r$ befutja a $[0,R]$ intervallumot, $\varphi$ pedig a $[0,2\pi]$ intervallumot, akkor $g$ előállítja a körlap minden pontját (pontosan egyszer) – hiszen a téglalap $(r,\varphi)$ koordinátájú pontja egyértelműen megfelel a körlap azon pontjának amelynek a távolsága az origótól $r$, az elfordulásának szöge pedig $\varphi$, és ezt a megfeleltetést éppen a $g$ függvény adja meg.

Mivel

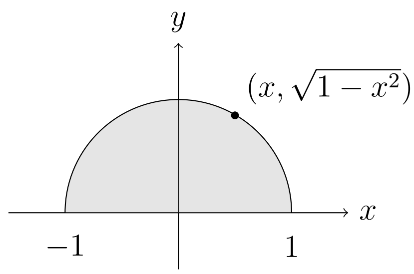
$$\det g'(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r,$$

a helyettesítéses integrálás a következőképpen alakul:

$$\iint\limits_{T} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r.$$




1. ábra. Polárkoordinátás helyettesítés.




2. ábra. Integrálási tartomány az 1. (a) feladatnál.

(a) Ebben az esetben a felső félkörlapon integrálunk, tehát az elfordulási szög csak 0 és $\pi$ között változik, lásd a 2. ábrát. Valamint, $R = 1$.

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^\pi r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1 [r\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = \pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

.

(b) $R = 1$ megint, és most a teljes körlapon integrálunk. Vegyük észre, hogy $x^2+y^2 = r^2$.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{2\pi}\cos(r^2+1)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1 [(\cos(r^2+1)r)\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 \cos(r^2+1)r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{\sin(r^2+1)}{2}\right]_{r=0}^{1}$$

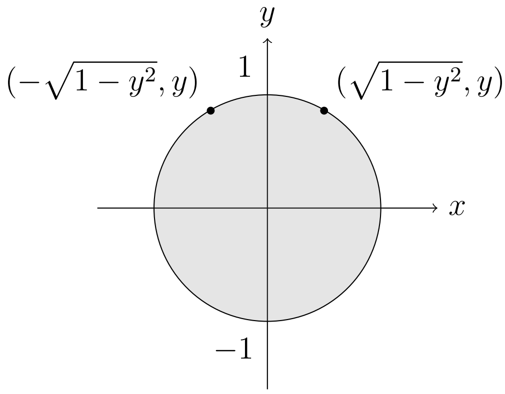
$$= \pi(\sin 2 - \sin 1)$$

2. Számítsuk ki az $\iint_T f\,\mathrm{d}A$ integrált!

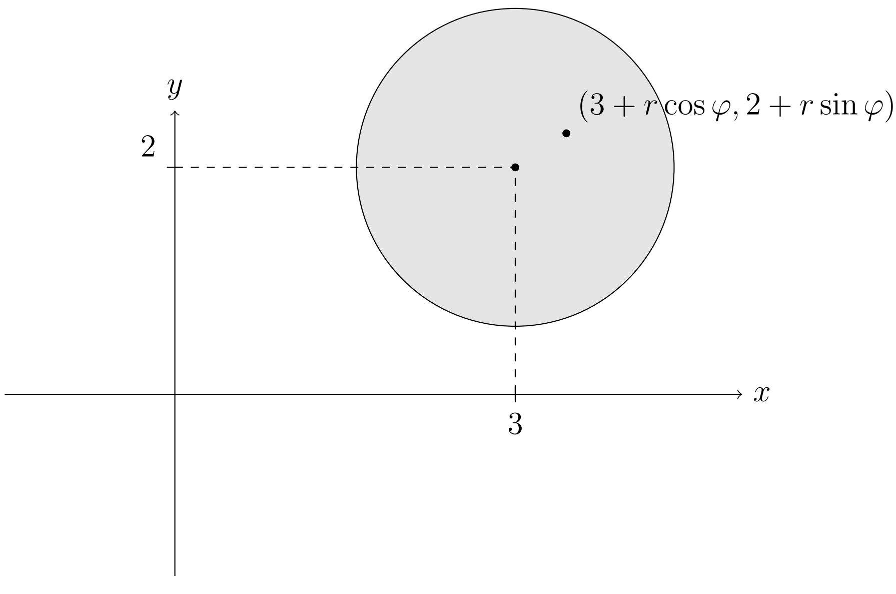
(a) $T = \{(x,y)|(x-3)^2+(y-2)^2 \le 2\}, \quad f(x,y) = x^2+y^2$

(b) $T = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, y \ge 0, x \ge 0\}, \quad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

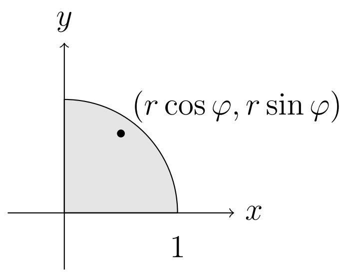
**Megoldás.**




3. ábra. Integrálási tartomány az 1. (b) feladatnál.




4. ábra. Integrálási tartomány a 2. (a) feladatnál.




5. ábra. Integrálási tartomány a 2. (b) feladatnál.

(a) Mivel $T$ középpontja $(3, 2)$, így $g(r, \varphi) = (3 + r\cos\varphi, 2 + r\sin\varphi)$ fogja az $r \in [0, \sqrt{2}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ téglalapot a $T$ körlapra képezni.

$$\iint\limits_T f \ \mathrm{d}A = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (3 + r\cos\varphi)^2 + (2 + r\sin\varphi)^2 \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} 13 + r^2 + 2r(3\cos\varphi + 2\sin\varphi) \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} [(13 + r^2)\varphi + 2r(3\sin\varphi - 2\cos\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} \ \mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} 2\pi(13 + r^2) \ \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left(13\sqrt{2} + \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{\sqrt{2}}\right) = \frac{82\sqrt{2}\pi}{3}$$

(b) A pozitív síknegyedbe eső negyedkörlapon kell integrálnunk, ezért az elfordulás szöge 0 és $\frac{\pi}{2}$ közé eshet, valamint $R = 1$.

$$\iint\limits_T f \ \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r^3\cos\varphi\sin\varphi}{r^2} \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r\cos\varphi\sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r =$$

$$\int_0^1 r \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin\varphi \ \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 r \ \mathrm{d}r = [\sin^2\varphi]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

3. Legyen $T$ egy tartomány az $xy$-sík első síknegyedében, amelyet az $xy = 1$, $xy = 9$ hiperbolák és az $y = x$, $y = 4x$ egyenesek határolnak. Használjuk az $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$, $u > 0$, $v > 0$ transzformációt az

$$\iint\limits_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y$$

integrál átírásához egy megfelelő $G$ tartományra az $uv$-síkon! Számítsuk ki az integrált!

**Megoldás.** Ahogy a feladat szövege mondja, legyen $g(u, v) = \left(\frac{u}{v}, uv\right)$. Amennyiben $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$,

$$u = \sqrt{xy}$$

$$v = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Mivel $1 \leq xy \leq 9$, $1 \leq \frac{y}{x} \leq 4$, azt kapjuk, hogy $1 \leq u \leq 3$, $1 \leq v \leq 2$. Tehát $g$ a $[1,3] \times [1,2]$ téglalapot képezi le a mi $T$ tartományunkra.

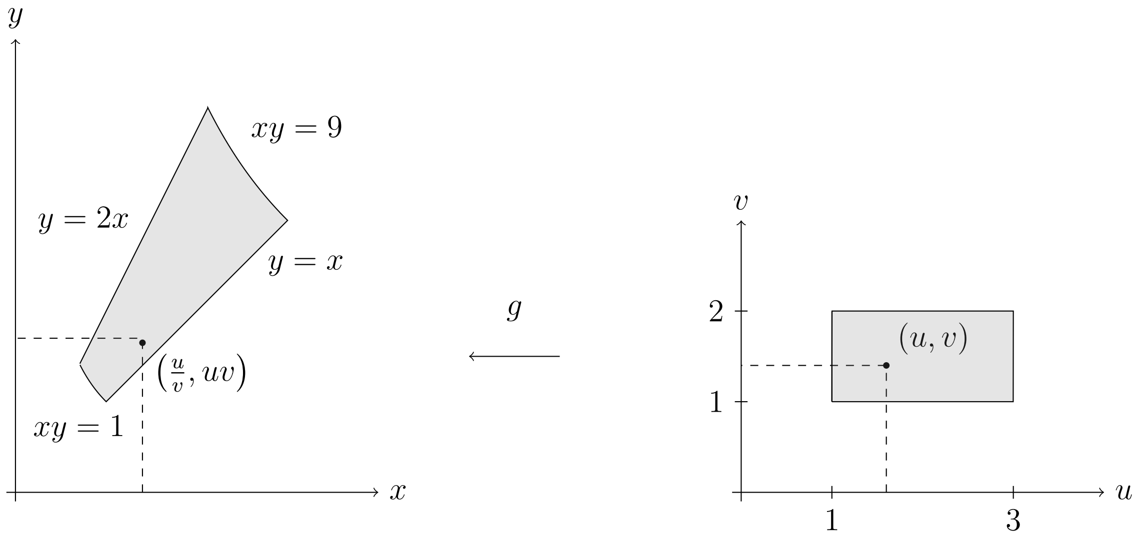
Számítsuk ki $g$ Jacobi-mátrixának determinánsát!

$$\det g'(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}.$$

A kérdéses integrál kiszámítása:

$$\iint_T \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \int_1^3 \frac{2u^2}{v} + 2u \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{2u^3}{3v} + u^2\right]_{u=1}^3 \mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{52}{3v} + 8 \,\mathrm{d}v = \left[\frac{52}{3}\log v + 8v\right]_{v=1}^2 = \frac{52}{3}\log 2 + 8.$$




6. ábra. Helyettesítés a 3. feladatnál.

4. Határozzuk meg a $T = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$ tartományt lefedő homogén síklemez tömegközéppontjának koordinátáit!

**Megoldás.** Mivel a síklemez homogén, a sűrűsége vehető azonosan 1-nek. Így a tömege egyenlő a térfogatával (mivel a magasság elhanyagolható, ez éppen a terület). Bár a félkör területét akár tudhatjuk fejből, számítsuk ki most integrálással, polárkoordinátás helyettesítéssel.

$$M = \iint_T 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^\pi r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^R r \,\mathrm{d}r \cdot \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}\varphi = \pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^R = \frac{R^2\pi}{2}.$$

Számítsuk ki a forgatónyomatékokat.

$$M_x = \iint_T y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^\pi \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^R = \frac{2R^3}{3},$$

$$M_y = \iint_T x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^\pi r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = [\sin\varphi]_{\varphi=0}^\pi \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^R = 0.$$

Így a tömegközéppont: $s = (s_x, s_y) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M}\right) = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

5. Határozzuk meg az $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ felület $xy$ sík feletti részének felszínét!

   **Megoldás.** A felszín az alábbi képlettel számítható:

$$F = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\ \mathrm{d}A,$$

   ahol $f'_x, f'_y$ a parciális deriváltakat jelölik. Tehát jelen esetben

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x,$$
$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

   A felület pontosan akkor van az $xy$-sík felett, ha $z \geq 0$, azaz $1 \geq x^2 + y^2$. Így a $T$ integrálási tartományunk az origó középpontú egységkörlap. Tehát polárkoordinátás helyettesítést alkalmazva:

$$F = \iint_T \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = 2\pi \left[\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_{r=0}^1$$
$$= \frac{(\sqrt{125} - 1)\pi}{6}.$$

**Gyakorlófeladatok.**

1. Számítsuk ki az $\iint_T f\ \mathrm{d}A$ integrált!

   (a) $T = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}, \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

   (b)* $T = \{(x,y) | \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}, \quad f(x,y) = |2xy|$

   (c) $T = \{(x,y) | x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}, \quad f(x,y) = 1$

   **Eredmények.**

   (a) $e\pi(e^{15} - 1)$

   (b) Tipp: a polárkoordináták mintájára találjunk ki elliptikus koordinátákat!

   (c) $\frac{\log 2}{2}$

2.* Határozzuk meg a $z = 1 - 2x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része és az $xy$-sík által határolt térrész térfogatát!

   **Tipp.** Gondoljunk vissza az 1. (b) gyakorlófeladatra!

3. Határozzuk meg az $f(x,y) = xy$, $T = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ felület felszínét!

   **Eredmény.** $\frac{2\pi(\sqrt{8}-1)}{3}$