# Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

# 12. Gyakorlat megoldásai

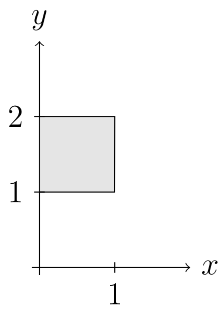
1. Számítsuk ki az alábbi téglalapon vett integrálokat!

   (a) $\int_1^2 \int_0^1 x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

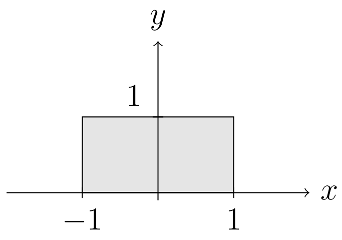
   (b) $\int_0^1 \int_{-1}^1 \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   **Megoldás.** A kétváltozós, valós értékű folytonos $f$ függvény $D = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon vett integráljának kiszámítására Fubini tételét használjuk:

$$\int_D f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$




(a) Integrálási tartomány az 1. (a) feladatnál




(b) Integrálási tartomány az 1. (b) feladatnál

1. ábra. Ábrák az 1. feladathoz.

(a)

$$\int_1^2 \int_0^1 x + y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left( \int_0^1 x + y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^1 \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{2} + y \,\mathrm{d}y$$
$$= \left[ \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^2 = 2$$

(b)

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \sin y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 \sin y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{x=0}^1 [x \sin y]_{-1}^1 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 2 \sin y \,\mathrm{d}y$$
$$= 2 \left[ -\cos y \right]_{y=0}^1 = 2(1 - \cos 1)$$

2. Számítsuk ki az alábbi normáltartományon vett integrálokat!

   (a) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$
   (b) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$
   (c) $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

**Megoldás.** Egy síkidomot, melyet alulról és felülről is $x$ folytonos függvényei határolnak, $x$-szerinti normáltartománynak nevezünk. Azaz, legyenek $\psi, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, az integrálási tartományunk pedig

$$N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x.$$

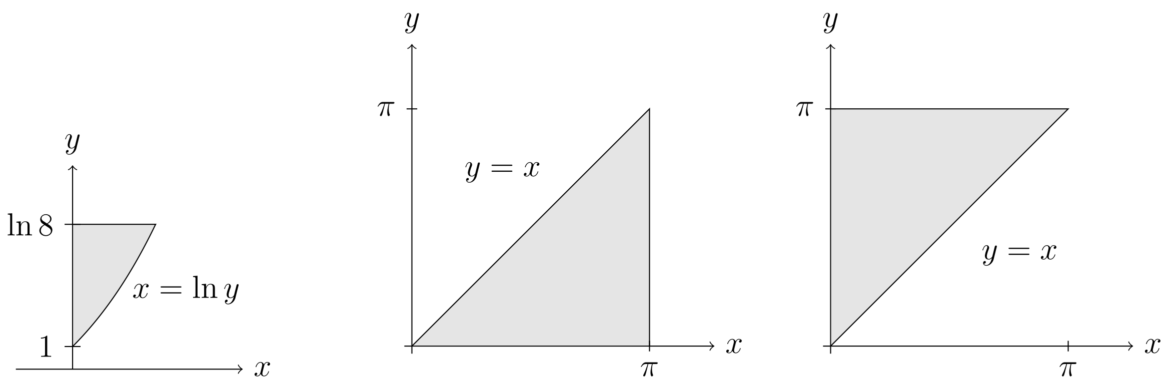
Hasonlóan definiálhatjuk az $y$-szerinti normáltartományt, és az azon vett integrált: legyenek $\rho, \sigma : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, az integrálási tartományunk pedig

$$N_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(y) \leq x \leq \sigma(y), y \in [a, b]\}.$$

Ekkor

$$\int_{N_y} f = \int_a^b \left( \int_{\rho(y)}^{\sigma(y)} f(x, y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y.$$

Vigyázat, az integrálás sorrendje ebben az esetben már nem cserélhető meg meggondolás nélkül!




(a) Integrálási tartomány a 2. (a) feladatnál

(b) Integrálási tartomány a 2. (b) feladatnál

(c) Integrálási tartomány a 2. (c) feladatnál

2. ábra. Ábrák a 2. feladathoz.

(a)

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_1^{\ln 8} \left( \int_0^{\ln y} e^{x+y}\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int_1^{\ln 8} \left[ e^{x+y} \right]_{x=0}^{\ln y}\ \mathrm{d}y$$
$$= \int_1^{\ln 8} (y-1)e^y\ \mathrm{d}y = [(y-1)e^y]_{y=1}^{\ln 8} - \int_1^{\ln 8} e^y\ \mathrm{d}y = [(y-2)e^y]_{y=1}^{\ln 8} = 8 \ln 8 - 16 + e$$

(b)

$$\int_0^\pi \int_0^x x\sin x \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\int_0^x x\sin x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\sin x\left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi x^2\sin x\,\mathrm{d}x = [-x^2\cos x]_{x=0}^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x\,\mathrm{d}x = \pi^2 + 2\left([x\sin x]_{x=0}^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \pi^2 + 2[\cos x]_0^\pi = \pi^2 - 4$$

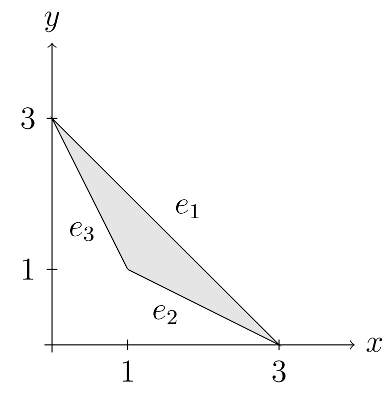
(c) Mivel $\frac{\sin y}{y}$ primitívfüggvényét nem tudjuk meghatározni, próbálkozzunk az integrálási sorrend megcserélésével! A 2c. ábráról könnyű leolvasni, hogy a megcserélés a következőképpen történik:

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \left(\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\left(\int_0^y 1\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin y\,\mathrm{d}y = [-\cos y]_{y=0}^\pi = 2$$

3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + 2y$ függvény integrálját az $A(1,1)$, $B(0,3)$, és $C(3,0)$ pontok által határolt háromszögön!

**Megoldás.** Az integrálási tartományt adó háromszöget a 3. ábrán láthatjuk. A következő integrált kell kiszámolnunk:

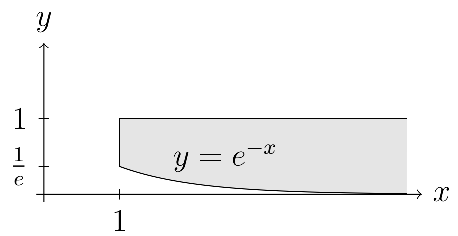
$$\int_\Delta f = \int_0^1 \int_{3-2x}^{3-x} x^2 + 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_{\frac{3-x}{2}}^{3-x} x^2 + 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [x^2y + y^2]_{y=3-2x}^{3-x}\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_1^3 [x^2y + y^2]_{y=\frac{3-x}{2}}^{3-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 6x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_1^3 -2x^3 + 9x^2 - 18x + 27\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 3x^2\right]_{x=0}^1 + \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{2} + 3x^3 - 9x^2 + 27x\right]_{x=1}^3 = \frac{9}{4} + \frac{20}{4} = \frac{29}{4}$$




3. ábra. Integrálási tartomány a 3. feladatnál, $e_1 : y = 3 - x$, $e_2 : y = \frac{3-x}{2}$, $e_3 : y = 3 - 2x$

4. Számítsuk ki az alábbi improprius kettős integrálokat!

(a) $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$




4. ábra. Integrálási tartomány a 4. (a) feladatnál

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

**Megoldás.**

(a)

$$\int_1^{\infty} \int_{e^{-x}}^{1} \frac{1}{x^3 y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \left[\frac{\ln y}{x^3}\right]_{y=e^{-x}}^{1} \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\ \mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^3}\ \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{c} = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2c^2} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)}\ \mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(y^2+1)}\ \mathrm{d}y$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)}\ \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{0} \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x + \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\right)^2$$
$$= (\lim_{c\to\infty} [\mathrm{arctg} x]_{-c}^{0} + \lim_{c\to\infty} [\mathrm{arctg} x]_0^{c})^2 = \left(0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi^2$$

**Gyakorlófeladatok.**

1. Vázoljuk fel az integrálási tartományt, majd határozzuk meg az alábbi kettős integrálok értékét!

(a) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 (\sqrt{x} + y)^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

(c) $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

(d) $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

(e) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{y^4+1}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$

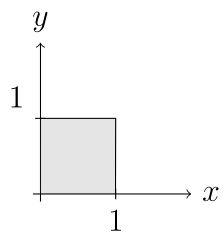
**Eredmények.**

(a) Az integrál értéke: $\frac{\pi}{12}$.

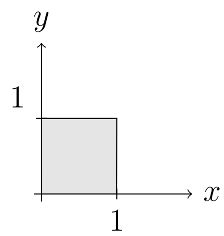
(b) Az integrál értéke: $\frac{3}{2}$.

(c) Az integrál értéke: $e - 2$.

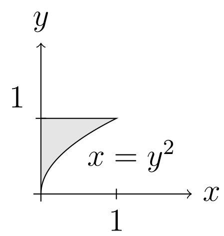
(d) Az integrál értéke: 2.



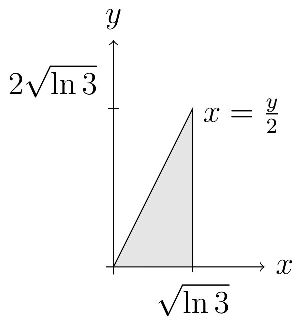

(a) Integrálási tartomány az 1. (a) gyakorlófeladatnál



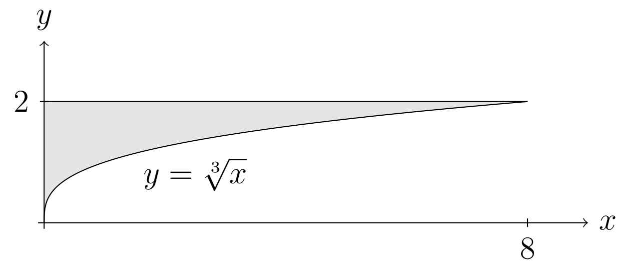

(b) Integrálási tartomány az 1. (b) gyakorlófeladatnál




(c) Integrálási tartomány az 1. (c) gyakorlófeladatnál




(d) Integrálási tartomány az 1. (d) gyakorlófeladatnál




(e) Integrálási tartomány az 1. (e) gyakorlófeladatnál

5. ábra. Ábrák az 1. gyakorlófeladathoz.

(e) Az integrál értéke: $\frac{\ln 17}{4}$.

2. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a $z = 12 - 3y^2$ henger és az $x + y = 2$ sík vág ki az első térnyolcadból!

   **Eredmény.** 20