Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

12. Gyakorlat megoldásai

1. Számítsuk ki az alábbi téglalapon vett integrálokat!

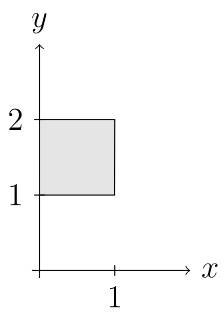
   (a) $\int_1^2 \int_0^1 x + y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

   (b) $\int_0^1 \int_{-1}^1 \sin y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

   (c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$

   Megoldás. A kétváltozós, valós értékű folytonos f függvény $D = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon vett integráljának kiszámítására Fubini tételét használjuk:

$$\int_D f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \; \mathrm{d}x \right) \; \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \; \mathrm{d}y \right) \; \mathrm{d}x$$



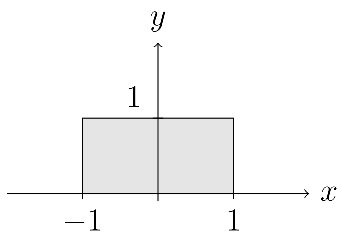
1. ábra. Integrálási tartomány az (a) feladatnál

(a)

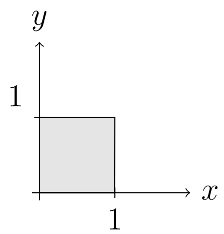
$$\int_1^2 \int_0^1 x + y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 x + y \; \mathrm{d}x \right) \; \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^1 \; \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{2} + y \; \mathrm{d}y$$
$$= \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^2 = 2$$

(b)

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \sin y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 \sin y \; \mathrm{d}x \right) \; \mathrm{d}y = \int_{x=0}^1 \left[x \sin y \right]_{-1}^1 \; \mathrm{d}y = \int_0^1 2 \sin y \; \mathrm{d}y$$
$$= 2 \left[-\cos y \right]_{y=0}^1 = 2(1 - \cos 1)$$



2. ábra. Integrálási tartomány a (b) feladatnál



3. ábra. Integrálási tartomány a (c) feladatnál

(c)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3(1+y^2)} \right]_{x=0}^1 \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{3(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}[\operatorname{arctg} y]_{y=0}^1 = \frac{\pi}{12}$$

2. Számítsuk ki az alábbi normáltartományon vett integrálokat!

   (a) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   (b) $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x \sin x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int_0^{8} \int_{\sqrt[3]{x}}^{2} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   Megoldás. Egy síkidomot, melyet alulról és felülről is x folytonos függvényei határolnak, x-szerinti normáltartománynak nevezünk. Azaz, legyenek $\psi, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, az integrálási tartományunk pedig

$$N_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}.$$

   Ekkor

$$\int_{N_x} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

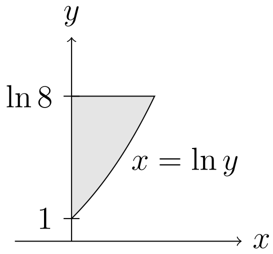
   Hasonlóan definiálhatjuk az y-szerinti normáltartományt, és az azon vett integrált: legyenek $\rho, \sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, az integrálási tartományunk pedig

$$N_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(y) \le x \le \sigma(y), y \in [a,b]\}.$$

   Ekkor

$$\int_{N_y} f = \int_a^b \left(\int_{\rho(y)}^{\sigma(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

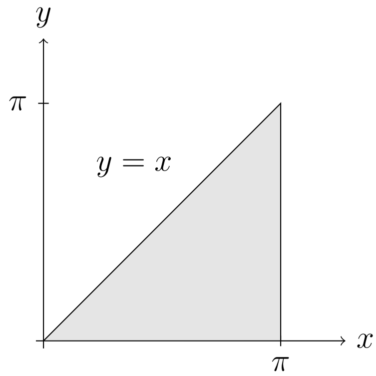
Vigyázat, az integrálás sorrendje ebben az esetben már nem cserélhető meg meggondolás nélkül!



4. ábra. Integrálási tartomány az (a) feladatnál

(a)

$$\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_1^{\ln 8}\left(\int_0^{\ln y} e^{x+y}\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y = \int_1^{\ln 8}\left[e^{x+y}\right]_{x=0}^{\ln y}\ \mathrm{d}y$$
$$= \int_1^{\ln 8}(y-1)e^y\ \mathrm{d}y = [(y-1)e^y]_{y=1}^{\ln 8} - \int_1^{\ln 8} e^y\ \mathrm{d}y = [(y-2)e^y]_{y=1}^{\ln 8} = 8\ln 8 - 16 + e$$



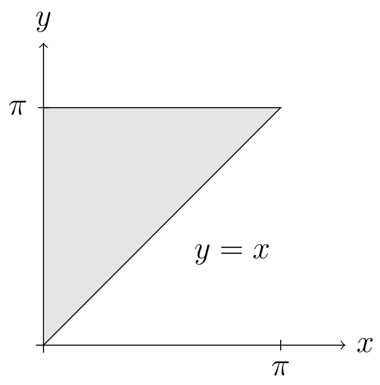
5. ábra. Integrálási tartomány a (b) feladatnál

(b)

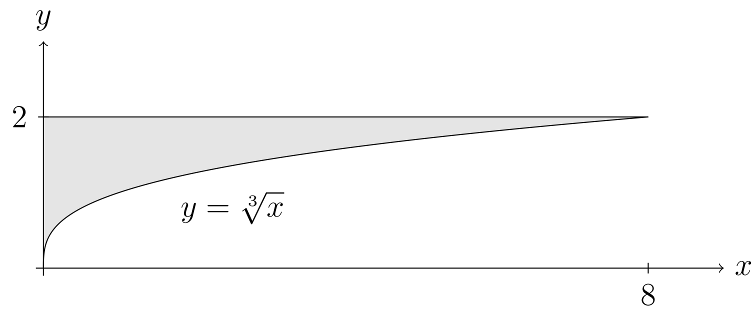
$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{x} x\sin x\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\sin x\left(\int_0^{x} 1\ \mathrm{d}y\right)\ \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{\pi} x^2\sin x\ \mathrm{d}x = [-x^2\cos x]_{x=0}^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos x\ \mathrm{d}x = \pi^2 + 2\left([x\sin x]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\ \mathrm{d}x\right)$$
$$= \pi^2 + 2[\cos x]_0^{\pi} = \pi^2 - 4$$

(c) Mivel $\frac{\sin y}{y}$ primitívfüggvényét nem tudjuk meghatározni, próbálkozzunk az integrálási sorrend megcserélésével! A 6. ábráról könnyű leolvasni, hogy a megcserélés a következőképpen történik:

$$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\pi}\frac{\sin y}{y}\left(\int_0^{y} 1\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\sin y\ \mathrm{d}y = [-\cos y]_{y=0}^{\pi} = 2$$



6. ábra. Integrálási tartomány a (c) feladatnál



7. ábra. Integrálási tartomány a (d) feladatnál

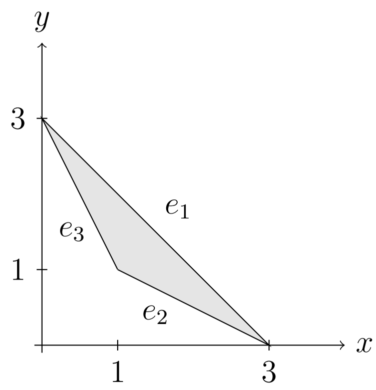
(d) Mivel $\frac{1}{y^4+1}$ primitívfüggvényét nem tudjuk meghatározni, próbálkozzunk az integrálási sorrend megcserélésével! A 7. ábráról könnyű leolvasni, hogy a megcserélés a következőképpen történik:

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^2 \frac{1}{y^4+1} \left(\int_0^{y^3} 1\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[\ln(y^4+1)\right]_{y=0}^2 = \frac{\ln 17}{4}$$

3. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 2y$ függvény integrálját az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$, és $C(3, 0)$ pontok által határolt háromszögön!

Megoldás. Az integrálási tartományt adó háromszöget a 8. ábrán láthatjuk. A következő integrált kell kiszámolnunk:

$$\int_\Delta f = \int_0^1 \int_{3-2x}^{3-x} x^2 + 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \int_{\frac{3-x}{2}}^{3-x} x^2 + 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [x^2y + y^2]_{y=3-2x}^{3-x}\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_1^3 [x^2y + y^2]_{y=\frac{3-x}{2}}^{3-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 - 3x^2 + 6x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_1^3 -2x^3 + 9x^2 - 18x + 27\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 3x^2\right]_{x=0}^1 + \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{2} + 3x^3 - 9x^2 + 27x\right]_{x=1}^3 = \frac{9}{4} + \frac{20}{4} = \frac{29}{4}$$



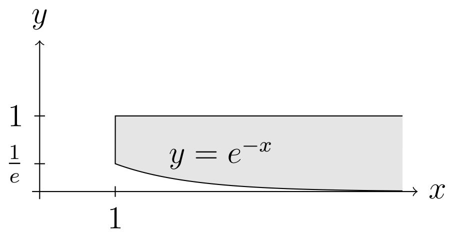
8. ábra. Integrálási tartomány a 3. feladatnál, $e_1: y = 3 - x$, $e_2: y = \frac{3-x}{2}$, $e_3: y = 3 - 2x$

4. Számítsuk ki az alábbi improprius kettős integrálokat!

   (a) $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

   (b) $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

   Megoldás.



9. ábra. Integrálási tartomány az (a) feladatnál

(a)

$$\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_1^\infty \left[\frac{\ln y}{x^3}\right]_{y=e^{-x}}^1 \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, \mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^3}\, \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2c^2} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)}\, \mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(y^2+1)}\, \mathrm{d}y$$
$$= \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)}\, \mathrm{d}x\right)^2 = \left(\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^0 \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x + \lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x\right)^2$$
$$= (\lim_{c\to\infty} [\mathrm{arctg} x]_{-c}^0 + \lim_{c\to\infty} [\mathrm{arctg} x]_0^c)^2 = \left(0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi^2$$

Gyakorlófeladatok.

1. Vázoljuk fel az integrálási tartományt, majd határozzuk meg az alábbi kettős integrálok értékét!

   (a) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

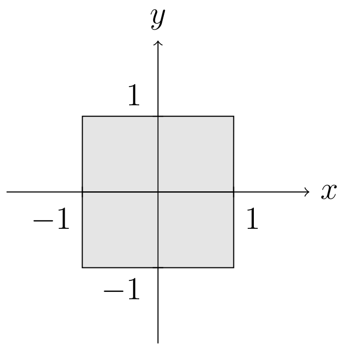
   (b) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} (\sqrt{x}+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   (c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   (d) $\int_{0}^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

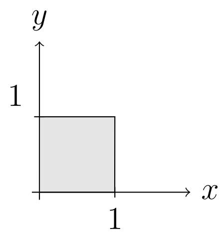
   Eredmények.

   (a) Az integrál értéke: $e^2 - 2 + \frac{1}{e^2}$.



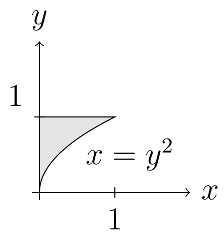
10. ábra. Integrálási tartomány az (a) feladatnál

   (b) Az integrál értéke: $\frac{3}{2}$.

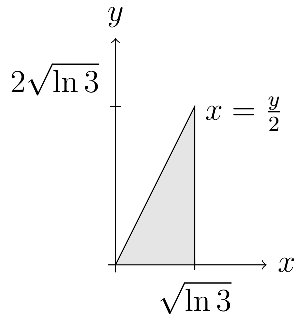


11. ábra. Integrálási tartomány a (b) feladatnál

   (c) Az integrál értéke: $e - 2$.



12. ábra. Integrálási tartomány a (c) feladatnál



13. ábra. Integrálási tartomány a (d) feladatnál

(d) Az integrál értéke: 2.

2. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a $z = 12 - 3y^2$ henger és az $x + y = 2$ sík vág ki az első térnyolcadból!

   Eredmény. 20

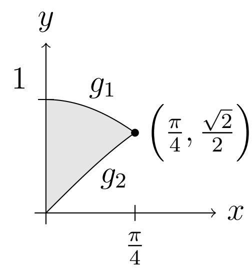
3. Az ebben a feladatban szereplő integrálok, ill. ezek összegei, xy-síkbeli tartományok területét adják. Vázoljuk fel a tartományokat, adjuk meg a határológörbéket és a metszéspontokat! Majd számítsuk ki az integrálokat!

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin x}^{\cos x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

   (b) $\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^2 \int_{-\frac{x}{2}}^{1-x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

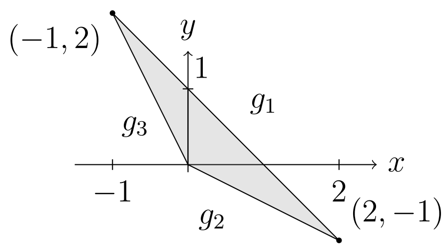
   Eredmények.

   (a) Az integrál értéke: $\sqrt{2} - 1$.



14. ábra. Integrálási tartomány az (a) feladatnál, $g_1 : y = \cos x$, $g_2 : y = \sin x$

   (b) Az integrál értéke: $\frac{3}{2}$.



15. ábra. Integrálási tartomány a (b) feladatnál, $g_1 : y = 1 - x$, $g_2 : y = -\frac{x}{2}$, $g_3 : y = -2x$