Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

11. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

   (a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

   (b) $f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x}$

   Megoldás. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek **csak akkor lehet** az (x,y) pontban lokális szélsőértéke, ha $\nabla f(x,y) = 0$, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

   Ha ez a feltétel teljesül (x,y) pontban, akkor további vizsgálat adja meg, hogy valóban szélsőértékhelyet találtunk-e, és ha igen, akkor milyen típusút. Ez a vizsgálat a következő: a

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) \end{bmatrix}$$

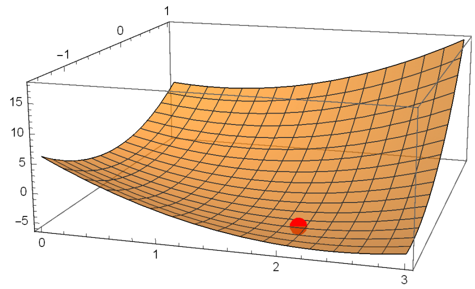
   mátrixot az f függvény (x,y) pontbeli Hesse-mátrixának nevezzük.
   Amennyiben $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ és

   - $H(x,y)_{11} > 0$ és $\det H(x,y) > 0 \Rightarrow f$-nek (x,y)-ban lokális minimuma van,
   - $H(x,y)_{11} < 0$ és $\det H(x,y) > 0 \Rightarrow f$-nek (x,y)-ban lokális maximuma van,
   - $\det H(x,y) < 0 \Rightarrow f$-nek (x,y)-ban nincs lokális szélsőértéke (itt úgynevezett nyeregpont van).

   Egyéb esetekben speciális vizsgálat szükséges.

   (a) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y - 5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8y + 2.$$



1. ábra. Ábra az 1a. feladathoz: minimumhely $(2, -1)$-ben, minimumérték -6.

Hogy megkapjuk, mely (x, y) pontokban lehet lokális szélsőérték, a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 5 &= 0 \\ 3x + 8y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek a megoldása $x = 2$, $y = -1$. Tehát a $P(2, -1)$ pontban lehet egyedül lokális szélsőérték. Vizsgáljuk meg ebben pontban a Hesse-mátrixot. Ehhez számítsuk ki először a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) &= 4, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) &= 8. \end{aligned}$$

Azaz a Hesse-mátrix elemei most konstansok, így

$$H(2, -1) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

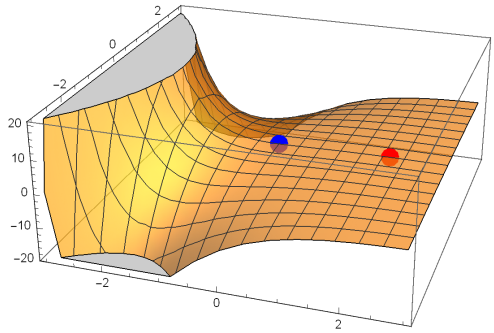
Mivel $H(2, -1)_{11} = 4 > 0$ és $\det H(2, -1) = 32 - 9 = 23 > 0$, ezért a függvénynek $P(2, -1)$-ben lokális minimuma van, a minimumérték $f(2, -1) = -6$.

(b) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (2x - x^2 + y^2)e^{-x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2ye^{-x}. \end{aligned}$$

Hogy megkapjuk, mely (x, y) pontokban lehet lokális szélsőérték, a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} (2x - x^2 + y^2)e^{-x} &= 0 \\ -2ye^{-x} &= 0 \end{aligned}$$



2. ábra. Ábra az 1b. feladathoz: maximumhely $(2,0)$-ban, maximumérték $4e^{-2}$ (piros), nyeregpont $(0,0)$-ban (kék).

Ennek a megoldása $x = 0$, $y = 0$ és $x = 2$, $y = 0$. Tehát a $P_1(0,0)$ és a $P_2(2,0)$ pontokban lehet lokális szélsőérték. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) &= (-2x + x^2 - y^2 + 2 - 2x)e^{-x}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2ye^{-x}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) &= -2e^{-x}.
\end{aligned}$$

Tehát a Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} (-2x + x^2 - y^2 + 2 - 2x)e^{-x} & 2ye^{-x} \\ 2ye^{-x} & -2e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Először vizsgáljuk meg a Hesse-mátrixot a $P_1(0,0)$ pontban. Ekkor

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\det H(0,0) = -4 < 0$, ezért a függvénynek $P_1(0,0)$-ban nincs lokális szélsőértéke, itt nyeregpont van.
A Hesse-mátrix az $P_2(2,0)$ pontban:

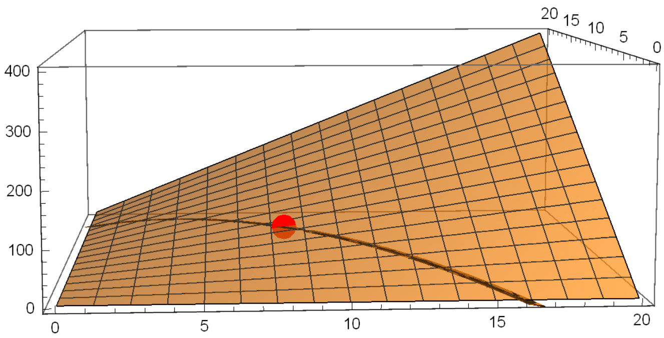
$$H(2,0) = \begin{bmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{bmatrix}.$$

Mivel $\det H(2,0) = 4e^{-4} > 0$ és $H(2,0)_{11} = -2e^{-2} < 0$ ezért a függvénynek $P_2(2,0)$-ben lokális maximuma van, a maximumérték $4e^{-2}$.

2. Mennyi a maximuma xy-nak, ha $x + y = 16$?

   Megoldás. Oldjuk meg a feladatot a Lagrange-multiplikátor módszerrel! Legyen $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x + y - 16$. Ekkor a következő h függvényt Lagrange-függvénynek nevezzük, a λ változót Lagrange-multiplikátornak:

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y).$$



3. ábra. Ábra a 2. feladathoz: az $f(x,y) = xy$ felület, az $x+y=16$-ot kielégítő pontjai (fekete görbe) és a feltételes maximumhely (piros gömb).

Ott lehet f maximális $g = 0$ feltétellel, ahol $\nabla h = 0$, azaz

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0.$$

Jelen esetben $h(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x+y-16)$, így

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,\lambda) &= y - \lambda,\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,\lambda) &= x - \lambda,\\ \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x + y - 16.\end{aligned}$$

Az

$$\begin{aligned} y - \lambda &= 0\\ x - \lambda &= 0\\ x + y - 16 &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása $x = y = \lambda = 8$ – könnyen látszik, hogy ez valóban maximuma f-nek az $x + y = 16$ egyenes mentén (ugyanis: az egyenes mentén eltávolodva $(8,8)$-ból $(8+\varepsilon, 8-\varepsilon)$-ba xy értéke 64-ről $(8+\varepsilon)(8-\varepsilon) = 64 - \varepsilon^2$-re csökken, valamint a másik irányba távolodva is hasonló mondható el), tehát xy maximuma $x + y = 16$ feltétellel $8 \cdot 8 = 64$.

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

   (b) $f(x,y) = (x-1)y + \frac{1}{x}$

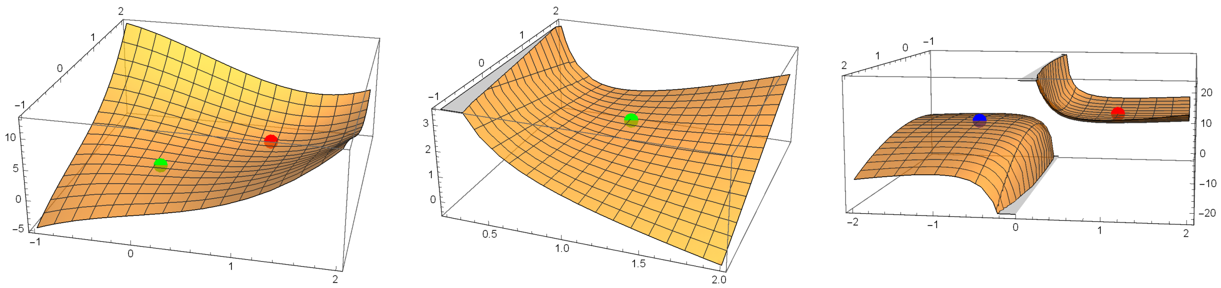
(c) $f(x,y) = (x^2+1)\left(y + \frac{1}{y}\right)$

Eredmények.

(a) $(0,0)$ nyeregpont, $f(1,1) = -1$ lokális minimum

(b) $(1,1)$ nyeregpont

(c) $f(0,1) = 2$ lokális minimum, $f(0,-1) = -2$ lokális maximum

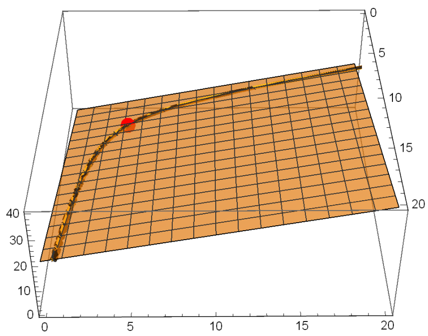


(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x,y) = (x-1)y + \frac{1}{x}$ (c) $f(x,y) = (x^2+1)\left(y + \frac{1}{y}\right)$

4. ábra. Ábra az 1. gyakorlófeladathoz: lokális minimumok (piros), lokális maximumok (kék), nyeregpontok (zöld).

2. Mennyi a minimuma $x+y$-nak, ha $xy = 16$ és $y > 0$?

Eredmény. 8



5. ábra. Ábra a 2. gyakorlófeladathoz: az $f(x,y) = x+y$ felület, az $xy = 16$-ot kielégítő pontjai (fekete görbe) és a feltételes minimumhely (piros gömb).