Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

11. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

   (a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

   (b) $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

   Megoldás. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek **csak akkor lehet** az (x, y) pontban lokális szélsőértéke, ha $\nabla f(x, y) = 0$, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

   Ha ez a feltétel teljesül (x, y) pontban, akkor további vizsgálat adja meg, hogy valóban szélsőértékhelyet találtunk-e, és ha igen, akkor milyen típusút. Ez a vizsgálat a következő: a

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) \end{bmatrix}$$

   mátrixot az f függvény (x, y) pontbeli Hesse-mátrixának nevezzük.
   Amennyiben $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ és

   - $H(x, y)_{11} > 0$ és $\det H(x, y) > 0 \Rightarrow f$-nek (x, y)-ban lokális minimuma van,
   - $H(x, y)_{11} < 0$ és $\det H(x, y) > 0 \Rightarrow f$-nek (x, y)-ban lokális maximuma van,
   - $\det H(x, y) < 0 \Rightarrow f$-nek (x, y)-ban nincs lokális szélsőértéke (itt úgynevezett nyeregpont van).

   Egyéb esetekben speciális vizsgálat szükséges.

   (a) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y - 5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8y + 2.$$

Hogy megkapjuk, mely (x, y) pontokban lehet lokális szélsőérték, a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 5 &= 0 \\ 3x + 8y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek a megoldása $x = 2$, $y = -1$. Tehát a $P(2, -1)$ pontban lehet egyedül lokális szélsőérték. Vizsgáljuk meg ebben pontban a Hesse-mátrixot. Ehhez számítsuk ki először a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = 4, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 3, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 8. \end{aligned}$$

Azaz a Hesse-mátrix elemei most konstansok, így

$$H(2, -1) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Mivel $H(2, -1)_{11} = 4 > 0$ és $\det H(2, -1) = 32 - 9 = 23 > 0$, ezért a függvénynek $P(2, -1)$-ben lokális minimuma van, a minimumérték $f(2, -1) = -6$.

(b) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 12x - 6x^2 + 6y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 6y + 6x. \end{aligned}$$

Hogy megkapjuk, mely (x, y) pontokban lehet lokális szélsőérték, a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} 12x - 6x^2 + 6y &= 0 \\ 6y + 6x &= 0 \end{aligned}$$

Ennek a megoldása $x = 0$, $y = 0$ és $x = 1$, $y = -1$. Tehát a $P_1(0, 0)$ és a $P_2(1, -1)$ pontokban lehet lokális szélsőérték. Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = 12 - 12x, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6, \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 6. \end{aligned}$$

Tehát a Hesse-mátrix:

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 12(1 - x) & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Először vizsgáljuk meg a Hesse-mátrixot a $P_1(0,0)$ pontban. Ekkor

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Mivel $H(0,0)_{11} = 12 > 0$ és $\det H(0,0) = 6(12-6) = 36 > 0$, ezért a függvénynek $P_1(0,0)$-ban lokális minimuma van, a minimumérték $f(0,0) = 0$.
A Hesse-mátrix az $P_2(1,-1)$ pontban:

$$H(1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\det H(1,-1) = -36 < 0$, ezért a függvénynek $P_2(1,-1)$-ben nyeregpontja van.

2. Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x,y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Keressük meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!

Megoldás. A T függvény globális minimumát és maximumát keressük a D tartományon. Keressük meg a lokális szélsőértékeket a tartomány belsejében, a minimumot és maximumot a határon, majd ezek összevetéséből határozzuk meg a globális minimumot és maximumot!

T elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1,$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = 4y.$$

Hogy megkapjuk, mely (x,y) pontokban lehet lokális szélsőérték, a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$2x - 1 = 0$$
$$4y = 0$$

Ennek a megoldása $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. Tehát a $P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pontban lehet lokális szélsőérték.

A Hesse-mátrix:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mivel $H\left(\frac{1}{2}, 0\right)_{11} = 2 > 0$ és $\det H\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 8 > 0$, ezért a függvénynek $P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-ban lokális minimuma van, a minimumérték $T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

Most vizsgáljuk meg a határt! Ezt az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör adja meg. Tehát itt a függvényünk

$$\bar{T}(x) = x^2 + 2(1 - x^2) - x = 2 - x^2 - x, \qquad x \in [-1, 1]$$

Ez egy alul nyitott parabola, $x = 1$-ben és $x = -2$-ben metszi az x tengelyt, a maximumát pedig $x = -\frac{1}{2}$-ben veszi fel, maximumértéke $\frac{9}{4}$. Tehát T minimuma a határon $T(1,0) = 0$. A maximuma a határon pedig $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

Tehát mindent összevetve, T globális minimumhelye $P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, a globális minimumértéke $-\frac{1}{4}$, globális maximumhelye pedig $P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $P_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a globális maximumértéke $\frac{9}{4}$.

3. Mennyi a maximuma xy-nak, ha $x + y = 16$?

Megoldás. Oldjuk meg a feladatot a Lagrange-multiplikátor módszerrel! Legyen $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 16$. Ekkor a következő h függvényt Lagrange-függvénynek nevezzük, a λ változót Lagrange-multiplikátornak:

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Ott lehet f maximális $g = 0$ feltétellel, ahol $\nabla h = 0$, azaz

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0.$$

Jelen esetben $h(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 16)$, így

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, \lambda) &= y - \lambda, \\
\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, \lambda) &= x - \lambda, \\
\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= x + y - 16.
\end{aligned}$$

Az

$$\begin{aligned}
y - \lambda &= 0 \\
x - \lambda &= 0 \\
x + y - 16 &= 0
\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása $x = y = \lambda = 8$ – könnyen látszik, hogy ez valóban maximuma f-nek az $x + y = 16$ egyenes mentén (ugyanis: az egyenes mentén eltávolodva $(8, 8)$-ból $(8 + \varepsilon, 8 - \varepsilon)$-ba xy értéke 64-ről $(8 + \varepsilon)(8 - \varepsilon) = 64 - \varepsilon^2$-re csökken, valamint a másik irányba távolodva is hasonló mondható el), tehát xy maximuma $x + y = 16$ feltétellel $8 \cdot 8 = 64$.

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

   (a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

   (c) $f(x, y) = (x^2 + 1)\left(y + \frac{1}{y}\right)$

   Eredmények.

   (a) $(0, 0)$ nyeregpont, $f(1, 1) = -1$ lokális minimum

   (b) $(0, 0)$ nyeregpont, $f(0, 2) = -12$ lokális minimum, $f(-2, 0) = -4$ lokális maximum, $(-2, 2)$ nyeregpont

   (c) $f(0, 1) = 2$ lokális minimum, $f(0, -1) = -2$ lokális maximum

2. Keressük meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény globális maximumát és minimumát az első síknegyedbe eső háromszög alakú tartományon, amelyet az $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ egyenesek határolnak.

   Eredmény. $f(0,2) = 4$ globális maximum, $f(0,0) = 0$ globális minimum

3. Mennyi a minimuma $x + y$-nak, ha $xy = 16$ és $y > 0$?

   Eredmény. 8