# Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

# 10. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait és írjuk fel a gradiensvektort!

   (a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

   (b) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

   **Megoldás.** A következőképpen definiáljuk az $x$- és $y$ szerinti parciális deriváltat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

   Ezek azt mutatják meg, hogy az $(x_0, y_0)$ pontban a függvénygrafikon milyen meredek az $x$-, illetve az $y$ tengely irányában.

   A fenti képletekből látszik, hogy parciális deriváltakat úgy számítunk, hogy csak a deriválási változó szerint deriválunk, a másik változót konstansnak tekintjük.

   Az $f$ függvény gradiensvektora a következő:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

   (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x, \qquad \nabla f = (2x - y, 2y - x)$$

   (b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} \ln y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} \ln y + \frac{e^{xy}}{y}, \quad \nabla f = \left( ye^{xy} \ln y, xe^{xy} \ln y + \frac{e^{xy}}{y} \right)$$

2. Határozzuk meg az $f(x, y) = \ln(x + y^2)$ összes másodrendű parciális deriváltját!

   **Megoldás.** A másodrendű parciális deriváltakat úgy kapjuk, hogy az elsőrendű parciális deriváltakat deriváljuk $x$, illetve $y$ szerint.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y^2}\right) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = \frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

Nem véletlen, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ – ez mindig teljesül, ha ezek a parciális deriváltak értelmesek és folytonosak $(x_0,y_0)$ egy nyílt környezetében. Ezt nevezzük Young-szabálynak.

3. Adjuk meg az $f(x,y) = xy - e^{x-y}$ függvény $(12,-5)$ irány menti deriváltját a $P_0 = (1,1)$ pontban!

   **Megoldás.** Legyen $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ értelmezve $(x_0,y_0)$ egy környezetében, valamint legyen $v = (v_1, v_2)$ egységvektor. Ekkor az $f$ függvény iránymenti deriváltja a $v$ irányban

$$\nabla_v f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t},$$

   Az iránymenti derivált azt adja meg, hogy $(x_0,y_0)$ pontból $v$ irányba indulva milyen meredeken nő vagy csökken a függvény.

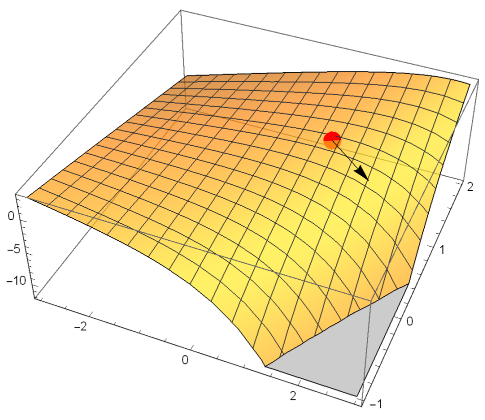
   Egyszerű módon a következőképpen kapható meg: $\nabla_v f = \langle \nabla f, v\rangle$.

   Jelen esetben $(12,-5)$ nem egységvektor, a hossza $\sqrt{12^2+5^2} = 13$. Tehát legyen $v = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$. Valamint

$$\nabla f = (y - e^{x-y}, x + e^{x-y}) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1,1) = (0,2)$$

   Így

$$\nabla_v f(1,1) = \langle \nabla f(1,1), v\rangle = 0 \cdot \frac{12}{13} - 2 \cdot \frac{5}{13} = \frac{10}{13}.$$




1. ábra. Ábra a 3. feladathoz: $f(x,y) = xy - e^{x-y}$, az $(1,1)$ pontbeli érték és a $(12,-5)$ irány.

4. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény a $P_0 = (1,1)$ pontban a leggyorsabban növekszik, illetve csökken!

   **Megoldás.** Az előbb említettük, hogy belátható a következő:

$$\langle \nabla f, v \rangle = \nabla_v f,$$

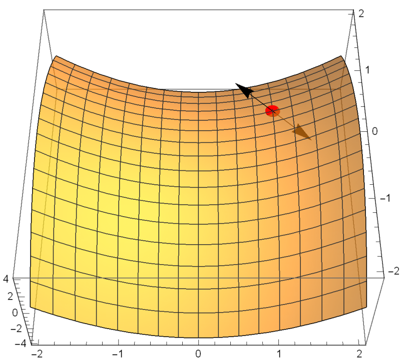
   Ebből könnyen látszik, hogy $\langle \nabla f, v \rangle$ akkor maximális, ha $\nabla f$ és $v$ párhuzamos. Tehát a függvény akkor növekszik a leggyorsabban, ha az adott pontbeli gradiensvektor irányában mozdulunk el. Hasonlóan, $\langle \nabla f, v \rangle$ akkor minimális, ha $\nabla f$ és $v$ ellentétes irányú. Tehát a függvény akkor csökken a leggyorsabban, ha az adott pontbeli gradiensvektorral ellentétes irányában mozdulunk el.

   Nyilván akkor mozdulunk el a leggyorsabban felfelé vagy lefelé, ha merőlegesen megyünk a szintvonalakra. Tehát a gradiensvektorok merőlegesek a megfelelő szintvonalakra. Ezt megfigyelhetjük a 4. ábrán.

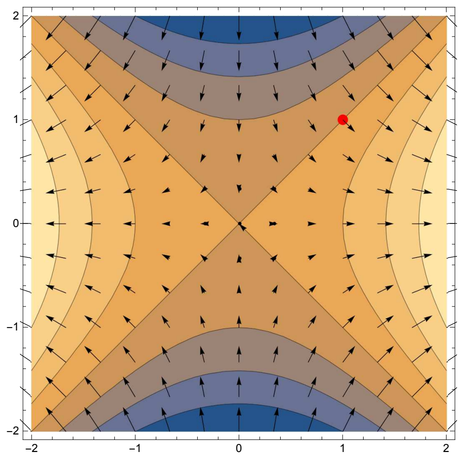
   Jelen esetben a gradiensmező:

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y),$$

   tehát a gradiensvektor a $P_0 = (1,1)$ pontban $(2,-2)$ – ebben az irányban elmozdulva fog a függvény a leggyorsabban nőni, valamint a $(-2,2)$ irányban fog a leggyorsabban csökkenni.




(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, az $(1,1)$ pontbeli érték és a $(2,-2)$, $(-2,2)$ irányok.




(b) Gradiensmező és szintvonalak.

2. ábra. Ábra a 4. feladathoz.

5. Számítsuk ki a $z = x^2 + y^2$ felület $P_0 = (1,1,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

   **Megoldás.** Nyilván $v_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ és $v_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nem párhuzamos elemei az érintősíknak. Ezért vektoriális szorzatuk megadja a sík egy normálvektorát:

$$n := v_y \times v_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right).$$

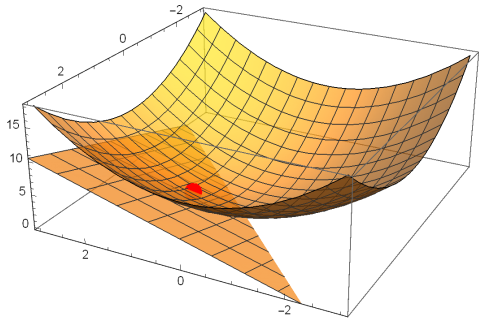
   Tehát a $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pontbeli érintősík egyenlete:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Jelen esetben

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2.$$

Tehát az érintősík egyenlete $2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=$, azaz $z = 2x+2y-2$.




3. ábra. Ábra a 5. feladathoz: $f(x,y) = x^2+y^2$ és az érintősík.

**Gyakorlófeladatok.**

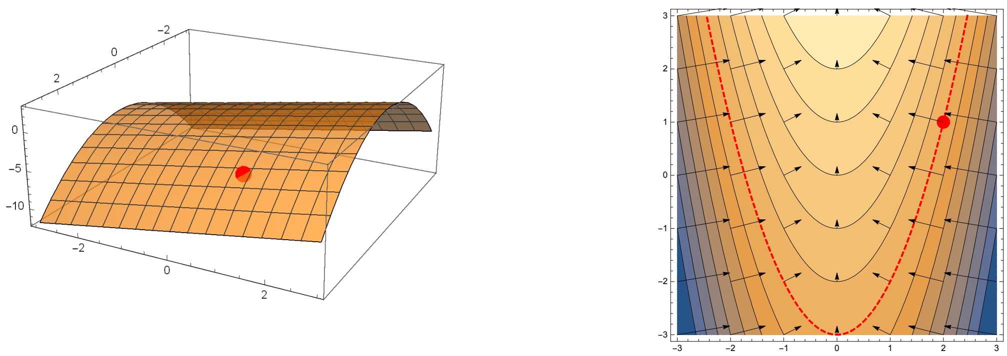
1. Lássuk be, hogy az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon megoldja a

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Laplace-egyenletet!

2. Legyen $f(x,y) = y - x^2$. Adjuk meg a gradienst a $P_0 = (2,1)$ pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amely az adott ponton átmegy!

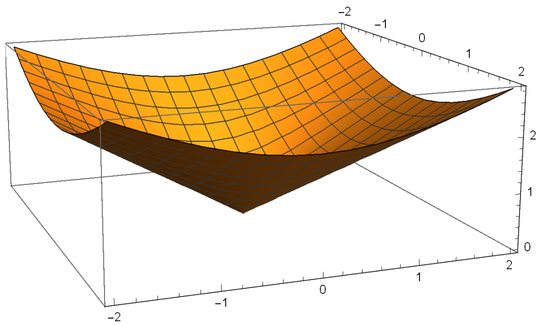
**Eredmény.** $\nabla f(2,1) = (-4,1)$, a szintvonal az $y = x^2-3$ egyenletű parabola lesz



4. ábra. Ábra az 2. gyakorlófeladathoz: $f(x,y) = y - x^2$, a szintvonalak és a gradiensmező.

3*. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvénynek nem létezik a $P_0 = (0,0)$ pontban iránymenti deriváltja $(1,1)$ irányban!

**Tipp.** Számítsuk ki külön-külön a $\lim_{t\to 0+} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}$ és a $\lim_{t\to 0-} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}$ határértéket!




5. ábra. Ábra az 3. gyakorlófeladathoz: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Figyeljük meg, hogy az origóban 'hegyes'!