Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

10. Gyakorlat megoldásai

1. Léteznek az alábbi határértékek? Amennyiben igen, állapítsuk meg értéküket!

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$

   Megoldás. Legyen $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ értelmezve (x_0, y_0) egy kipontozott környezetében (ez egy halmaz (x_0, y_0) körül, ami (x_0, y_0) pontot nem tartalmazza). Azt mondjuk, hogy f határértéke az (x_0, y_0) pontban az L szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy

   $$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

   ha

   $$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

   Azaz, ha (x, y) közel van (x_0, y_0) ponthoz az x, y-síkban, akkor $f(x, y)$ közel van az L számhoz. Pontosan akkor folytonos a függvény az értelmezési tartomány (x_0, y_0) pontjában, ha $L = f(x_0, y_0)$, azaz a határérték a helyettesítési érték.

   (a)

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0),\ x\neq y} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2(x-y)}{x-y}$$
   $$= \lim_{(x,y)\to(0,0),\ x\neq y} \sqrt{x}+\sqrt{y}+2 = \lim_{(x,y)\to(0,0),\ x\neq y} \sqrt{x} + \lim_{(x,y)\to(0,0),\ x\neq y} \sqrt{y} + 2 = 0+0+2$$
   $$= 2,$$

   mert az egyváltozós gyökfüggvényről tudjuk, hogy folytonos.

   (b) Közelítsünk a $(0, 0)$ ponthoz $y = mx$ egyenletű egyenesek mentén. Ha létezne határérték, természetesen minden ilyen egyenes mentén ugyanaz kellene hogy legyen. Viszont

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to(0,0)} \frac{mx^2}{|mx^2|} = \operatorname{sgn} m.$$

   Azaz például az $y = x$ egyenes felett 1-hez tart a függvényérték, míg az $y = -x$ felett -1-hez. Tehát nem létezik a határérték $(0, 0)$-ban.

2. Adjuk meg az $f(x,y) = 2xy - 3y^2$ függvény $(4,3)$ irány menti deriváltját a $P_0 = (2,1)$ pontban!

   Megoldás. Legyen $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ értelmezve (x_0, y_0) egy környezetében, valamint legyen $v = (v_1, v_2)$ egységvektor. Ekkor az f függvény iránymenti deriváltja a v irányban

$$\nabla_v f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t},$$

   Az iránymenti derivált azt adja meg, hogy (x_0, y_0) pontból v irányba indulva milyen meredeken nő vagy csökken a függvény.

   Jelen esetben $(4,3)$ nem egységvektor, ezért osszuk le a hosszával, ami $\sqrt{4^2+3^2} = 5$. Tehát legyen $v = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Így az iránymenti derivált:

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\left(2 + \frac{4}{5}t\right)\left(1 + \frac{3}{5}t\right) - 3\left(1 + \frac{3}{5}t\right)^2 - (4-3)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{24}{25}t^2 + 4t + 4 - \frac{27}{25}t^2 - \frac{18}{5}t - 3 - 1}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{2}{5} - \frac{3}{25}t = \frac{2}{5}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltjait!

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

   (b) $f(x,y) = e^{xy} \ln y$

   Megoldás. A parciális deriváltak speciális iránymenti deriváltak: az irányok a koordinátatengelyek (vagy másképpen mondva, a természetes bázisvektorok). Az $(1,0)$ irányú iránymenti derivált az x szerinti parciális derivált, a $(0,1)$ irányú iránymenti derivált az y szerinti parciális derivált, azaz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

   A fenti képletekből látszik, hogy parciális deriváltakat úgy számítunk, hogy csak a deriválási változó szerint deriválunk, a másik változót konstansnak tekintjük.

   (a)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x$$

   (b)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} \ln y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} \ln y + \frac{e^{xy}}{y}$$

4. Határozzuk meg az $f(x,y) = \ln(x + y^2)$ összes másodrendű parciális deriváltját!

Megoldás. A másodrendű parciális deriváltakat úgy kapjuk, hogy az elsőrendű parciális deriváltakat deriváljuk x, illetve y szerint.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y^2}\right) = -\frac{1}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y^2}\right) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x+y^2}\right) = \frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Nem véletlen, hogy $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ – ez mindig teljesül, ha értelmesek ezek a parciális deriváltak. Ezt nevezzük Young-szabálynak.

5. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben az $f(x,y) = x^2 - y^2$ függvény a $P_0 = (1,1)$ pontban a leggyorsabban növekszik, illetve csökken!

   Megoldás. Definiáljuk az f függvény gradiensmezejét a következőképpen:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

   Belátható, hogy

$$\nabla f \cdot v = \nabla_v f,$$

   ahol $\cdot$ a skalárszorzatot jelöli. Könnyen látszik, hogy $\nabla f \cdot v$ akkor maximális, ha ∇f és v párhuzamos. Tehát a függvény akkor növekszik a leggyorsabban, ha az adott pontbeli gradiensvektor irányában mozdulunk el. Hasonlóan, $\nabla f \cdot v$ akkor minimális, ha ∇f és v ellentétes irányú. Tehát a függvény akkor csökken a leggyorsabban, ha az adott pontbeli gradiensvektorral ellentétes irányában mozdulunk el.

   Jelen esetben a gradiensmező:

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y),$$

   tehát a gradiensvektor a $P_0 = (1,1)$ pontban $(2,-2)$ – ebben az irányban elmozdulva fog a függvény a leggyorsabban nőni, valamint a $(-2,2)$ irányban fog a leggyorsabban csökkenni.

6. Számítsuk ki a $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ felület $P_0 = (0,0,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

   Megoldás. Nyilván $v_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ és $v_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ nem párhuzamos elemei az érintősíknak. Ezért vektoriális szorzatuk megadja a sík egy normálvektorát:

$$n := v_y \times v_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right).$$

   Tehát a $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pontbeli érintősík egyenlete:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Jelen esetben

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Tehát az érintősík egyenlete $z = 2$.

Gyakorlófeladatok.

1. Legyen $f(x,y) = \sqrt{y-x}$. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, valamint adjuk meg a szintvonalakat!

   Eredmény. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$, szintvonal z magasságban: $y = x + z^2$

2. Léteznek az alábbi határértékek? Amennyiben igen, állapítsuk meg értéküket!

   (a) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$

   Eredmények.

   (a) 1

   (b) nem létezik

3. Lássuk be, hogy az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon megoldja a

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

   Laplace-egyenletet!

4. Legyen $f(x,y) = y - x^2$. Adjuk meg a gradienst a $P_0 = (2,1)$ pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amely az adott ponton átmegy!

   Eredmény. $\nabla f(2,1) = (-4,1)$, a szintvonal az $y = x^2 - 3$ egyenletű parabola lesz

5*. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvénynek nem létezik a $P_0 = (0,0)$ pontban iránymenti deriváltja $(1,1)$ irányban!

   Tipp. Számítsuk ki külön-külön a $\lim_{t\to 0+} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}$ és a $\lim_{t\to 0-} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t}$ határértéket!