Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

9. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az A mátrix sajátértéke a λ szám, ha létezik v vektor, amelyre $Av = \lambda v$, azaz A mint lineáris leképezés a v irányban λ-szoros nyújtás. Ekkor v-t a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük.

Alakítsuk tovább az $Av = \lambda v$ egyenletet! Ez ekvivalens az $(A - \lambda I)v = 0$ egyenlettel, ahol I a megfelelő méretű egységmátrix. Ennek az egyenletnek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(A - \lambda I) = 0$. Ezt az úgynevezett karakterisztikus egyenletet megoldva kapjuk meg a sajátértékeket. A sajátvektorokat adott λ sajátértékhez pedig a $(A - \lambda I)v = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

(a)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Látjuk, hogy $\det(A - \lambda I) = 0$ pontosan akkor, ha $\lambda = 1$ vagy $\lambda = -1$, tehát ezek a sajátértékek.

A $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektorok kiszámításához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az első egyenlet szerint $-v_1 = -v_2$, tehát $v = (t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ alakúak a sajátvektorok a $\lambda = 1$ sajátértékhez. (A második egyenletből is ez jönne ki.)

A $\lambda = -1$-hoz tartozó sajátvektorok kiszámításához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az első egyenlet szerint $v_1 = -v_2$, tehát például a $v = (t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$ alakúak a sajátvektorok a $\lambda = -1$ sajátértékhez. (A második egyenletből ugyanez jönne ki.)

Vegyük észre, hogy a mátrixunk az $y = x$ egyenesre tükrözés mátrixa! A (t, t) irányban (tehát az $y = x$ egyenes mentén) ez a leképezés valóban egyszeres nyújtás. Az erre merőleges $(t, -t)$ irányban pedig éppen -1-szerezés.

(b)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & -9 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(-2 - \lambda) + 36 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$$

Ez pedig pontosan akkor 0, ha $\lambda = 4$, tehát ez az egyetlen sajátérték. Mivel kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azt mondjuk, hogy a multiplicitása kettő. A sajátvektorok kiszámításához a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{bmatrix} 10 - 4 & -9 \\ 4 & -2 - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az első egyenlet alapján $6v_1 = 9v_2$, tehát $v = (3t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$ alakúak a sajátvektorok a $\lambda = 4$ sajátértékhez. (A második egyenlet nem hordoz további információt, az első $\frac{2}{3}$-szorosa.)

(c)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 8 & -\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 16) = -(4 - \lambda)^2(4 + \lambda)$$

pontosan akkor 0, ha $\lambda = \pm 4$. A $\lambda = -4$-hez tartozó sajátvektorok kiszámítása:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből azt kapjuk, hogy $v_1 = 0$ és $2v_2 = -v_3$ tehát $v^1 = (0, t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$ alakúak a sajátvektorok $\lambda = -4$-hez.

Nézzük a 4-hez tartozó sajátvektorokat. Ez egy kettő multiplicitású sajátérték, és található hozzá két lineárisan független sajátvektor. A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mindhárom egyenletet megvizsgálva látszik, hogy v_1 tetszőleges. A második egyenlet alapján $2v_3 = 4v_2$. (A harmadik egyenlet ennek a -2-szerese, tehát nem ad új információt.) Tehát a sajátvektorok $(s, t, 2t)$, $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ alakúak. Ezek alapján megadható két lineárisan független megoldás, például $v^2 = (1, 0, 0)$ és $v^3 = (0, 1, 2)$. Azaz a 4 sajátértékhez egy kétdimenziós sajátaltér tartozik: ebben a síkban a leképezés négyszeres nyújtás.

2. Döntsük el, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt a Q mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $Q^{-1}AQ$-t. Adjuk meg A^{10} mátrixot!

Megoldás. Amennyiben a leképezés rendelkezik három lineárisan független sajátvektorral, a mátrixa diagonalizálható (azaz bázistranszformációval olyan alakra hozható, hogy az átlóban a sajátértékek találhatók, a többi elem nulla). Mégpedig a következőképpen: legyen v^1, v^2, v^3 három lineárisan független sajátvektor, a hozzájuk tartozó sajátértékek pedig λ_1, λ_2, λ_3. Legyen

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c} \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ \\ \end{array}\right], \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $AQ = QD$, azaz $Q^{-1}AQ = D$. Vagyis A leképezés a sajtárvektorai által alkotott bázisban diagonális mátrix. Vagy másképpen $A = QDQ^{-1}$, és így könnyű látni, hogy $A^n = QD^nQ^{-1}$, ahol

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}.$$

(Gondoljuk ezt végig!) Amennyiben ez lehetséges, (például ha A szimmetrikus mátrix) célszerű három egységhosszú, merőleges sajátvektort választani, mert ebben az esetben Q ortogonális mátrix lesz, és ekkor $Q^{-1} = Q^T$ (ezt gondoljuk meg!).

Térjünk rá a feladat megoldásra. Először keressük meg A sajátértékeit!

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1)$$

Ez akkor 0, ha $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, vagy $\lambda = 0$ – ez a három sajátértékünk.

A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektorokat a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $v^1 = (1, 0, 0)$.

A $\lambda_1 = 2$-höz tartozó sajátvektorokat a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $v^2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

A $\lambda_1 = 0$-hoz tartozó sajátvektorokat a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $v^3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Így

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valamint

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^9 & 2^9 \\ 0 & 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}.$$

3. Állapítsuk meg, hogy a $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$ egyenlet milyen görbét határoz meg a síkon, majd ábrázoljuk is!

   Megoldás. Ez egy kúpszelet egyenlete, a cél áttérni olyan koordinátákra, amelyekben a koordinátatengelyek párhuzamosak a kúpszelet tengelyeivel. Ebben a koordinátarendszerben már a középiskolában tanultak szerint ábrázolhatjuk a kúpszeletet.

   Írjuk át az egyenletünket

   $$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

   alakba. Ekkor

   $$A = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} -15 & -6 \end{bmatrix}.$$

   Határozzuk meg A sajátértékeit!

   $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -10 \\ -10 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(25-\lambda) - 100 = \lambda(\lambda - 29)$$

   Ez pontosan akkor 0, ha $\lambda = 0$ vagy $\lambda = 29$.

   Határozzunk meg először egy $\lambda_1 = 29$ sajátértékhez tartozó egységhosszú sajátvektort:

   $$\begin{bmatrix} -25 & -10 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Tehát $-10v_1 = 4v_2$, azaz $-5v_1 = 2v_2$. Legyen $\bar{v}^1 = (2, -5)$. Mivel $\|\bar{v}^1\| = \sqrt{29}$, ezért $v^1 = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$ egységhosszú sajátvektor a $\lambda_1 = 29$ sajátértékhez.

   Határozzunk meg most egy $\lambda_2 = 0$ sajátértékhez tartozó egységhosszú sajátvektort is:

   $$\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $4v_1 = 10v_2$, azaz $2v_1 = 5v_2$. Legyen $\bar{v}^2 = (5,2)$. Mivel $\|\bar{v}^2\| = \sqrt{29}$, ezért $v^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$ egységhosszú sajátvektor a $\lambda_2 = 0$ sajátértékhez.

Legyen a v^1, v^2 a két új bázisvektorunk! Azaz, ha

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} v^1 & v^2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ -\frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix},$$

legyen

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

mivel Q ortogonális mátrix. Azaz:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{5}{\sqrt{29}}y, \\ y' &= \frac{5}{\sqrt{29}}x + \frac{2}{\sqrt{29}}y. \end{aligned}$$

Legyen $\underline{x} = (x,y)$, $\underline{x}' = (x', y')$. Ekkor az egyenletünk másodfokú része:

$$\underline{x}A\underline{x}^T = \underline{x}QDQ^T\underline{x}^T = (Q^T\underline{x}^T)^T D (Q^T\underline{x}^T) = \underline{x}' D (\underline{x}')^T,$$

ahol

$$D = \begin{bmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 = 29(x')^2.$$

Írjuk át az elsőfokú részt is az új koordinátákba!

$$K\underline{x}^T = KQQ^T\underline{x}^T = K'(\underline{x}')^T,$$

ahol

$$K' = KQ = \begin{bmatrix} 0 & -3\sqrt{29} \end{bmatrix}$$

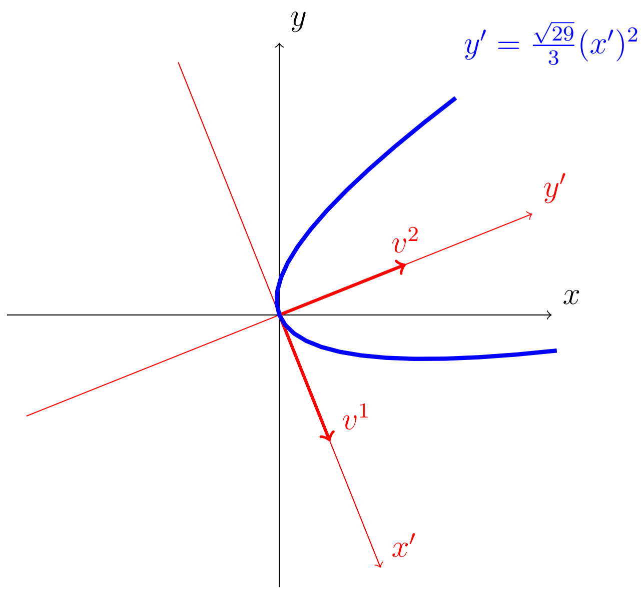
Azaz,

$$-15x - 6y = 0 \cdot x' - 3\sqrt{29}y'$$

Tehát összességében

$$\begin{aligned} 0 = 4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y &= 29(x')^2 - 3\sqrt{29}y' \\ y' &= \frac{\sqrt{29}}{3}(x')^2 \end{aligned}$$

Ez az alábbi ábrán látható parabola egyenlete:



Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit!

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 23 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \quad T = \{\text{az } y = -x \text{ egyenesre tükrözés mátrixa}\}$$

Eredmények. A sajátértékei: $5, 10, 1, 0, -4$, T sajátértékei: ± 1

2* Legyen

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

az origó körüli α-szögű forgatás mátrixa. Határozzuk meg (komplex) sajátértékeit! A geometriai szemléletünk segítségével magyarázzuk meg, miért nem lehet valós sajátértéke!

Eredmények. $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$

3. Döntsük el, hogy az

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

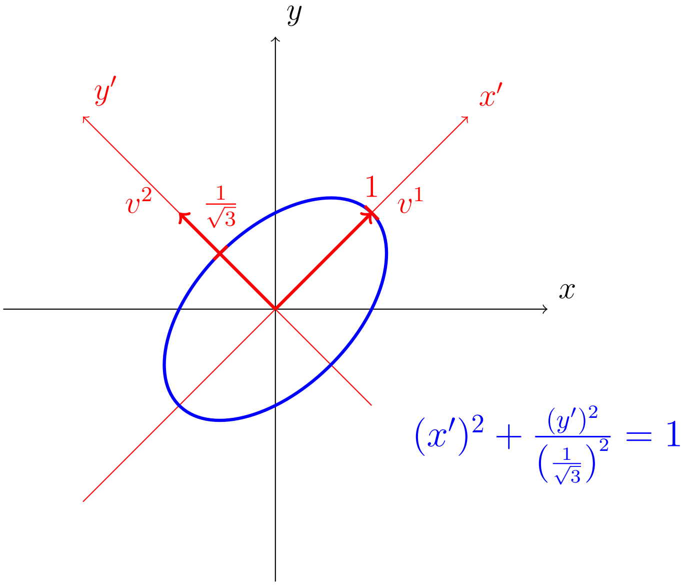
diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt a P mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $P^{-1}AP$-t és ennek segítségével adjuk meg A^{10} mátrixot!

Eredmények.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Állapítsuk meg, hogy a $2x^2+2y^2-2xy=1$ egyenlet milyen görbét határoz meg a síkon, majd ábrázoljuk is!

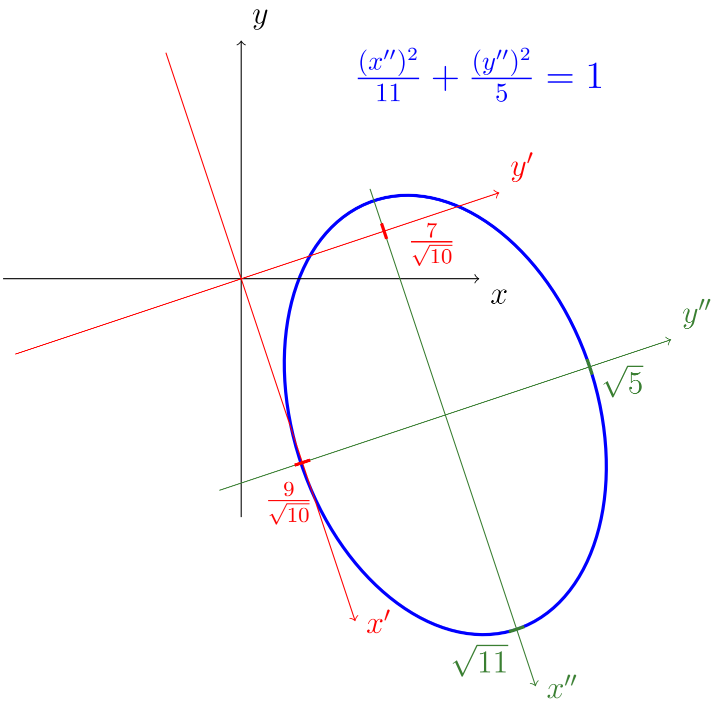
   Ábra.



1. ábra. $x'=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y,\ y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y$

5. Állapítsuk meg, hogy a $21x^2+6xy-13y^2-114x-34y+73=0$ egyenlet milyen görbét határoz meg a síkon, majd ábrázoljuk is!

   Ábra.



2. ábra. $x'=\frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y,\ y'=\frac{3}{\sqrt{10}}x+\frac{1}{\sqrt{10}}y,\ x''=x'-\frac{9}{\sqrt{10}},\ y''=y'-\frac{7}{\sqrt{10}}$

A 4. és 5. gyakorlófeladat kidolgozott megoldása, valamint további kidolgozott feladatok Simon Károly honlapján:

- http://www.math.bme.hu/~simonk/msc/kupszeletek_a.pdf
- http://www.math.bme.hu/~simonk/msc/kupszeletek_b.pdf