Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

8. Gyakorlat megoldásai

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ vektorteret az euklideszi skalárszorzattal ellátva. Határozzuk meg az $u = (1, 0, 1, 0)$ és a $v = (-3, -3, -3, -3)$ vektorok által bezárt szöget!

   Megoldás. $\mathbb{R}^4$-ben az $u \in V$ és $v \in V$ vektorok által bezárt szög koszinuszát a következőképpen számíthatjuk az euklidészi skalárszorzat segítségével:

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

   Most nekünk

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \frac{-3-3}{\sqrt{2 \cdot 36}} = -\frac{6}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

   Tehát a bezárt szögük $\frac{3\pi}{4}$.

2. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektorteret az euklideszi skalárszorzattal ellátva. Döntsük el, hogy a

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   vektorok ortonormált rendszert alkotnak-e!

   Megoldás. Egy W vektorrendszert ortonormáltnak nevezünk, ha elemei páronként merőlegesek (azaz tetszőleges kettőnek nulla a skalárszorzata), valamint egységhosszúak (azaz $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = 1 \ \forall\ v \in W$).

   Először ellenőrizzük, hogy jelen esetben egységhosszúak-e a vektoraink.

$$\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1,$$
$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1,$$
$$\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1.$$

   Tehát a vektoraink egységhosszúak. Viszont nem lesznek páronként merőlegesek, mert

$$\langle v_2, v_3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \neq 0.$$

   Tehát nem alkotnak ortogonális rendszert.

3. A Gram-Schmidt módszerrel alakítsuk az $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$, $u_3 = (1,2,1)$ rendszert $\mathbb{R}^3$ ortonormált bázisává!

Megoldás. A Gram-Schmidt módszer lényege a következő: az első vektort változatlanul hagyjuk. A második vektort felírhatjuk mint egy elsőre merőleges, és egy elsővel párhuzamos vektor összege. Vesszük az elsőre merőleges komponensét, ez lesz az új második vektorunk. A harmadiknak vesszük az első és második síkjára merőleges komponensét (és így tovább, amennyiben magasabb dimenzióban vagyunk mint 3). Végül minden vektort lenormálunk, azaz leosztunk a hosszával. Képletszerűen:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \\ v_2 &= u_2 - \langle v_1, u_2\rangle \frac{v_1}{\langle v_1, v_1\rangle}, \\ v_3 &= u_3 - \langle v_1, u_3\rangle \frac{v_1}{\langle v_1, v_1\rangle} - \langle v_2, u_3\rangle \frac{v_2}{\langle v_2, v_2\rangle}, \end{aligned}$$

majd

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}.$$

Tehát a mi esetünkben:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1,1), \\ v_2 &= (-1,1,0) - 0 \cdot \frac{(1,1,1)}{3} = (-1,1,0), \\ v_3 &= (1,2,1) - 4 \cdot \frac{(1,1,1)}{3} - \frac{(-1,1,0)}{2} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

végeredményben

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad w_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrixok ortogonális mátrixok-e!

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Megoldás. Egy mátrix akkor ortogonális, ha $A^T A = I$, azaz ha az oszlopai ortonormált rendszert alkotnak.

(a) $(1,0)$ és $(0,1)$ hossza is $\sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, valamint $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$, tehát merőlegesek. Azaz ez a mátrix ortogonális.

(b) A második és a harmadik oszlop nem merőleges, hiszen $1 \cdot 1/\sqrt{2} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} \neq 0$, tehát ez a mátrix nem ortogonális.

5. Írjuk fel a $v = (2,-1,3)$ vektor koordinátáit a

$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (2,2,0), \quad v_3 = (3,3,3)$$

bázisban!

Megoldás. A vektortér egy bázisa egyértelműen előállít minden vektort a vektortérből, azaz léteznek c_1, c_2, c_3 konstansok, melyekre

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3.$$

Ezeket a konstansokat nevezzük a vektor adott bázisbeli koordinátáinak. Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}.$$

Ez pedig ekvivalens az alábbi lineáris egyenletrendszerrel:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}.$$

Oldjuk meg kibővített mátrixos alakban:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\0 & 2 & 3 & -1\\0 & 0 & 3 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & -1\\0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]$$

Tehát v koordinátái a $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ bázisban: $[v]_B = (3, -2, 1)$.

6. Tekintsük $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1,0), (0,1)\}$ és $B' = \{(2,1), (-3,4)\}$ bázisát.

   (a) Keressük meg a B'-ből B-be való bázisátmenet mátrixát!

   (b) Keressük meg a B-ből B'-be való bázisátmenet mátrixát!

   (c) Amennyiben $[w]_B = (3, -5)$, számítsuk ki $[w]_{B'}$-t!

Megoldás. $[w]_B = (w_1, w_2)$ azt jelenti, hogy

$$w = w_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}.$$

Valamint $[w]_{B'} = (w'_1, w'_2)$ azt jelenti, hogy

$$w = w'_1 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + w'_2 \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}w'_1\\w'_2\end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}w'_1\\w'_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}w'_1\\w'_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}w'_1\\w'_2\end{bmatrix}.$$

Azaz a B'-ból B-be való bázisátmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 4\end{bmatrix}.$$

Könnyen látszik, hogy B-ből B'-be való bázisátmenet mátrixa P^{-1}. Ez pedig a következő:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

Azaz
$$P^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ha $[w]_B = (3,-5)$, akkor $[w]_{B'} = P^{-1}[w]_B$, azaz
$$[w]_{B'} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}.$$

7. Határozzuk meg $\mathbb{R}^2$ természetes bázisában az

   (a) $y = x$ egyenesre,

   (b) $y = -x$ egyenesre,

   (c) origóra való középpontos

   tükrözés mátrixát! Mi a kapcsolat közöttük? Határozzuk meg a mátrixok segítségével a $P(1,2)$ pont képeit!

   Megoldás. A természetes bázis: $e_1 = (1,0)$ és $e_2 = (0,1)$.

   (a) Könnyen látható, hogy az $y = x$ egyenesre tükrözés e_1-et e_2-be, e_2-t pedig e_1-be viszi. Azaz ha A a mátrixa, akkor
   $$Ae_1 = e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
   és
   $$Ae_2 = e_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   Azaz
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (b) Könnyen látható, hogy az $y = -x$ egyenesre tükrözés e_1-et $-e_2$-be, e_2-t pedig $-e_1$-be viszi. Azaz ha B a mátrixa, akkor
   $$Be_1 = -e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$
   és
   $$Be_2 = -e_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
   Azaz
   $$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Könnyen látható, hogy az origóra való középpontos tükrözés e_1-et $-e_1$-be, e_2-t pedig $-e_2$-be viszi. Azaz ha C a mátrixa, akkor

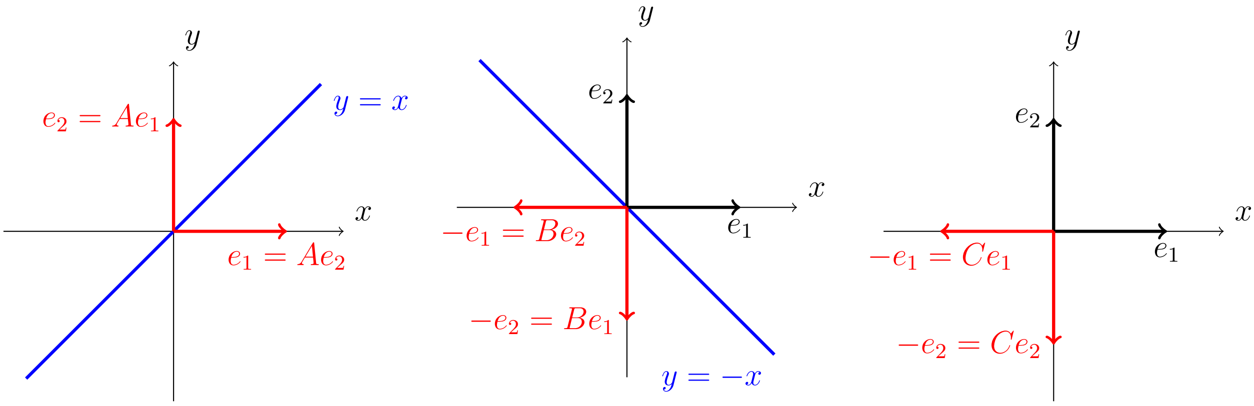
$$Ce_1 = -e_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

és

$$Ce_2 = -e_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Azaz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$



1. ábra. Ábra az 6. feladathoz.

Látható, hogy

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = C,$$

ami összhangban van azzal, hogy az $y = x$, majd az $y = -x$ egyenesre való tükrözés az origóra való középpontos tükrözést adja.

A P pont képeit a következőképpen számítjuk:

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$BP = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$CP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy az alábbi vektorok ortogonálisak legyenek:

$$u = (1, 1, 1, 1), \quad v = (1, 1, -1, a), \quad (1, -1, b, c).$$

Eredmény. $a = -1$, $b = -c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok ortogonálisak-e!

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Eredmények.

(a) igen

(b) nem

3. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!

Eredmény. $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

4. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában az x, y síkra vetítés mátrixát!

Eredmény.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában a z-tengely körüli

(a) 60°-os

(b) 30°-os

forgatás mátrixát! Számítsuk ki a $P(1, 1, 1)$ pont e forgatások általi képét!

Eredmények.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P' = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P'' = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$