

MATEMATIKA A2A VEKTORFÜGGVÉNYEK – ÉPÍTŐMÉRNÖKÖKNEK

8. Gyakorlat megoldásai

1. Tekintsük az \mathbb{R}^3 vektorteret az euklideszi skalárszorzattal ellátva. Határozzuk meg az $u = (4, 1, 8)$ és a $v = (1, 0, -3)$ vektorok által bezárt szög koszinuszát!

Megoldás. Egy skalárszorzatot V vektortérben az $u \in V$ és $v \in V$ vektorok által bezárt szög koszinuszát a következőképpen *definiáljuk* a skalárszorzat segítségével:

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Tehát most nekünk

$$\cos \alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \frac{4 - 3 \cdot 8}{\sqrt{81} \cdot 10} = -\frac{20}{9\sqrt{10}}.$$

2. Tekintsük az \mathbb{R}^3 vektorteret az euklideszi skalárszorzattal ellátva. Döntsük el, hogy a

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

vektorok ortonormált rendszert alkotnak-e!

Megoldás. Egy W vektorrendszert ortonormálnak nevezünk, ha elemei páronként merőlegesek (azaz tetszőleges kettőnek nulla a skalárszorzata), valamint egység-hosszúak (azaz $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 1 \forall v \in W$).

Először ellenőrizzük, hogy jelen esetben egység-hosszúak-e a vektoraink.

$$\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1,$$

$$\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}} = 1.$$

Tehát a vektoraink egység-hosszúak. Viszont nem lesznek páronként merőlegesek, mert

$$\langle v_2, v_3 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \neq 0.$$

Tehát nem alkotnak ortogonális rendszert.

3. A Gram-Schmidt módszerrel alakítsuk az $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 2, 1)$ rendszert \mathbb{R}^3 ortonormált bázisává!

Megoldás. A Gram-Schmidt módszer lényege a következő: az első vektort változatlanul hagyjuk. A második vektort felírhatjuk mint egy elsőre merőleges, és egy elsővel párhuzamos vektor összege. Vesszük az elsőre merőleges komponensét, ez lesz az új második vektorunk. A harmadiknak vesszük az első és második síkjára merőleges komponensét (és így tovább, amennyiben magasabb dimenzióban vagyunk mint 3). Végül minden vektort lenormálunk, azaz leosztunk a hosszával. Képletszerűen:

$$\begin{aligned}v_1 &= u_1, \\v_2 &= u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle \frac{v_1}{\langle v_1, v_1 \rangle}, \\v_3 &= u_3 - \langle v_1, u_3 \rangle \frac{v_1}{\langle v_1, v_1 \rangle} - \langle v_2, u_3 \rangle \frac{v_2}{\langle v_2, v_2 \rangle},\end{aligned}$$

majd

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, \quad w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}.$$

Tehát a mi esetünkben:

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, 1, 1), \\v_2 &= (-1, 1, 0) - 0 \cdot \frac{(1, 1, 1)}{3} = (-1, 1, 0), \\v_3 &= (1, 2, 1) - 4 \cdot \frac{(1, 1, 1)}{3} - \frac{(-1, 1, 0)}{2} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right),\end{aligned}$$

végezerményben

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad w_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

4. Tekintsük \mathbb{R}^2 $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ és $B' = \{(2, 1), (-3, 4)\}$ bázisát.

- (a) Keressük meg a B' -ből B -be való bázisátmenet mátrixát!
 (b) Keressük meg a B -ből B' -be való bázisátmenet mátrixát!
 (c) Amennyiben $[w]_B = (3, -5)$, számítsuk ki $[w]_{B'}$ -t!

Megoldás. $[w]_B = (w_1, w_2)$ azt jelenti, hogy

$$w = w_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Valamint $[w]_{B'} = (w'_1, w'_2)$ azt jelenti, hogy

$$w = w'_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + w'_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{bmatrix}.$$

Azaz a B' -ből B -be való bázisátmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Könnyen látszik, hogy B -ből B' -be való bázisátmenet mátrixa P^{-1} . Ez pedig a következő:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Azaz

$$P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ha $[w]_B = (3, -5)$, akkor $[w]_{B'} = P^{-1}[w]_B$, azaz

$$[w]_{B'} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} \\ -\frac{13}{11} \end{bmatrix}.$$

5. Írjuk fel a $v = (2, -1, 3)$ vektor koordinátáit a

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 2, 0), \quad v_3 = (3, 3, 3)$$

bázisban!

Megoldás. A vektortér egy bázisa egyértelműen előállít minden vektort a vektortérből, azaz léteznek c_1, c_2, c_3 konstansok, melyekre

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3.$$

Ezeket a konstansokat nevezzük a vektor adott bázisbeli koordinátáinak. Tehát a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

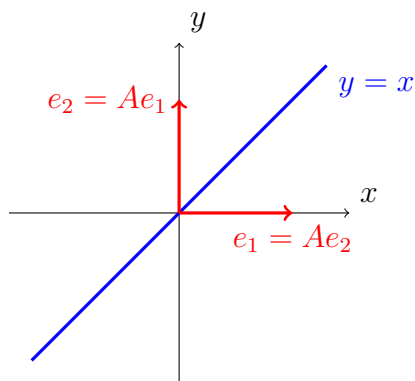
Ez pedig ekvivalens az alábbi lineáris egyenletrendszerrel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oldjuk meg kibővített mátrixos alakban:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Tehát v koordinátái a $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ bázisban: $[v]_B = (3, -2, 1)$.



1. ábra. Ábra az 6. feladathoz.

6. Határozzuk meg \mathbb{R}^2 természetes bázisában az $y = x$ egyenesre tükrözés mátrixát!

Megoldás. A természetes bázis: $e_1 = (1, 0)$ és $e_2 = (0, 1)$. Könnyen látható, hogy az $y = x$ egyenesre tükrözés e_1 -et e_2 -be, e_2 -t pedig e_1 -be viszi. Azaz ha A a mátrixa, akkor

$$Ae_1 = e_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

és

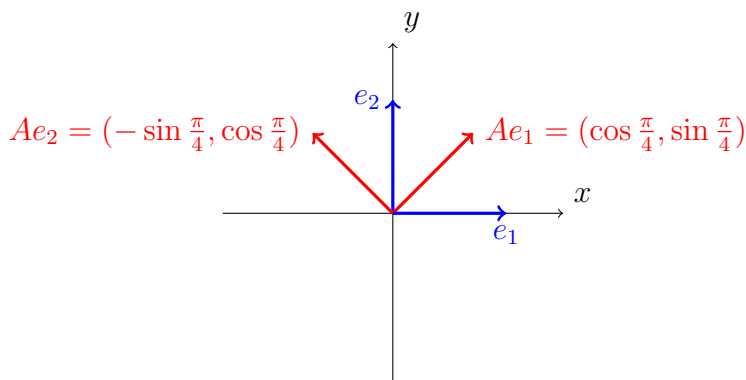
$$Ae_2 = e_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Azaz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Határozzuk meg \mathbb{R}^2 -ben a 45° -al való forgatás mátrixát a $B = \{(1, 1), (2, 0)\}$ bázisban!

Megoldás. Először állapítsuk meg, hogy mi a forgatásunk mátrixa a természetes $N = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban!



2. ábra. Ábra az 7. feladathoz.

Legyen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ a forgatásunk mátrixa, ekkor az ábra alapján világos, hogy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{bmatrix},$$

és

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{4} \\ \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}.$$

Azaz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel ezt a leképezést most a B bázisban! Legyen

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát egy olyan mátrix, aminek az oszlopai B elemei. Láttuk a 4. feladatban, hogy a természetes bázisról a bázisátmenet mátrixa Q^{-1} , ami most

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(Ezt ellenőrizzük le!)

Tehát egy x vektor a B bázisban $Q^{-1}x$ -el egyenlő, Ax vektor $Q^{-1}Ax$ -el. Az A leképezés mátrixa a B bázisban az az A^B mátrix lesz, ami az x vektor B bázisbeli alakját az Ax vektor B bázisbeli alakjába viszi. Tehát:

$$A^B(Q^{-1}x) = Q^{-1}Ax \Rightarrow A^Bx = Q^{-1}AQx \Rightarrow A^B = Q^{-1}AQ.$$

A mi esetünkben:

$$A^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ellenőrizzük le a mátrixszorzást!)

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok ortogonálisak-e! (Azaz, hogy az oszlopaik ortonormált vektorrendszert alkotnak-e.)

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Eredmények.

(a) igen

(b) nem

2. Határozzuk meg \mathbb{R}^3 -ben az $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!

Eredmény. $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

3. Határozzuk meg \mathbb{R}^3 természetes bázisában az x, y síkra vetítés mátrixát!

Eredmény.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Határozzuk meg \mathbb{R}^3 természetes bázisában a z -tengely körüli 60° -os forgatás mátrixát! Számítsuk ki a $P(1, 1, 1)$ pont e forgatás általi képét!

Eredmény.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P' = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 1 \right)$$