Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

8. Gyakorlat

1. Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ vektorteret az euklideszi skalárszorzattal ellátva. Határozzuk meg az $u = (1, 0, 1, 0)$ és a $v = (-3, -3, -3, -3)$ vektorok által bezárt szöget!

2. Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektorteret az euklideszi skalárszorzattal ellátva. Döntsük el, hogy a

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

vektorok ortonormált rendszert alkotnak-e!

3. A Gram-Schmidt módszerrel alakítsuk az $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 2, 1)$ rendszert $\mathbb{R}^3$ ortonormált bázisává!

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrixok ortogonális mátrixok-e!

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel a $v = (2, -1, 3)$ vektor koordinátáit a

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (2, 2, 0), \quad v_3 = (3, 3, 3)$$

bázisban!

6. Tekintsük $\mathbb{R}^2$ $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ és $B' = \{(2, 1), (-3, 4)\}$ bázisát.

   (a) Keressük meg a B'-ből B-be való bázisátmenet mátrixát!

   (b) Keressük meg a B-ből B'-be való bázisátmenet mátrixát!

   (c) Amennyiben $[w]_B = (3, -5)$, számítsuk ki $[w]_{B'}$-t!

7. Határozzuk meg $\mathbb{R}^2$ természetes bázisában az

   (a) $y = x$ egyenesre,

   (b) $y = -x$ egyenesre,

   (c) origóra való középpontos

tükrözés mátrixát! Mi a kapcsolat közöttük? Határozzuk meg a mátrixok segítségével a $P(1,2)$ pont képeit!

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy az alábbi vektorok ortogonálisak legyenek:
$$u = (1,1,1,1), \quad v = (1,1,-1,a), \quad (1,-1,b,c).$$

2. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok ortogonálisak-e!
$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$-ben az $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!

4. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában az x, y síkra vetítés mátrixát!

5. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában a z-tengely körüli

   (a) $60°$-os

   (b) $30°$-os

   forgatás mátrixát! Számítsuk ki a $P(1,1,1)$ pont e forgatások általi képét!