Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

7. Gyakorlat megoldásai

1. Keressük meg az alábbi mátrix sorterének egy bázisát, az oszlopterének egy bázisát, és határozzuk meg a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A mátrix rangja a sortér (sorvektorok által kifeszített altér) dimenziója, vagy másképp tekintve az oszloptér (oszlopvektorok által kifeszített altér) dimenziója.

Keressük meg először a sortér egy bázisát. Ezt megkaphatjuk Gauss-eliminációs lépések segítségével. Vonjuk le a harmadik sorból az első és a második sort.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a harmadik sor lineárisan függött az első és második sortól. Viszont az első és második sor függetlenek, mivel nem egymás számszorosai. Így a

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vektorok a sortér egy bázisát alkotják (mert ez egy maximális független rendszer). Ebből már látszik, hogy a mátrix rangja 2 lesz.

Az oszloptér bázisának meghatározásához végezzünk Gauss-eliminációs lépéseket az *oszlopokon*. Vonjuk le az első és második oszlopot a harmadik oszlopból.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a harmadik oszlop lineárisan függött az első és második oszloptól. Viszont az első és második oszlop függetlenek, mivel nem egymás számszorosai. Így a

$$o_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad o_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok az oszloptér egy bázisát alkotják (mert ez egy maximális független rendszer).

2. Az alábbi megadott információk szerint határozzuk meg, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány szabad paramétere van!

	A mérete	A rangja	$[A\|b]$ rangja
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	5×9	2	2
(d)	4×4	0	0

Megoldás. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan akkor

- van egyértelmű megoldása, ha rang$A$ =rang$[A|b] = n$,
- van végtelen sok megoldása, ha rang$A$ =rang$[A|b] = k < n$ (ekkor a szabad paraméterek száma $n - k$),
- nincs megoldása, ha rang$A$ $\neq$rang$[A|b]$.

(a) Ebben az esetben $n = 3$ és rang$A$ =rang$[A|b] = 3$, tehát a megoldás egyértelmű.

(b) Ebben az esetben rang$A$ $\neq$rang$[A|b]$, tehát nincs megoldás.

(c) Ebben az esetben $n = 9$ és rang$A$ =rang$[A|b] = 2$, tehát végtelen sok megoldás van, a szabad paraméterek száma $9 - 2 = 7$.

(d) Egy mátrix rangja csak akkor lehet nulla, ha nullmátrix. Tehát most egy olyan egyenletrendszerrel van dolgunk, ahol az együttható mátrix nullmátrix, a jobbolodal pedig nullvektor. Ezt az egyenletrendszert tetszőleges $x \in \mathbb{R}^4$ vektor kielégíti. Ezt mondhatjuk úgy is, hogy végtelen sok megoldás van 4 szabad paraméterrel.

3. Legyen $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Döntsük el, hogy

$$\langle u, v\rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2$$

skalárszorzatot határoz-e meg $\mathbb{R}^3$-on!

Megoldás. Egy V vektortérben skalárszorzatnak nevezünk egy olyan műveletet, amely két vektorhoz egy valós számot rendel, továbbá teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

- Szimmetrikus: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \ \forall\ u, v \in V$,
- Bilineáris:
  - $\langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle \ \forall\ u, v, w \in V$,
  - $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle \ \forall\ u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- Pozitív definit: $\langle u, u\rangle \geq 0 \ \forall\ u \in V$ és $\langle u, u\rangle = 0$ pontosan akkor, ha $u = 0$.

Ellenőrizzük, hogy a mi esetünkben teljesülnek-e ezek a tulajdonságok!

- $\langle u, v\rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 = v_1^2 u_1^2 + v_2^2 u_2^2 + v_3^2 u_3^2 = \langle v, u\rangle$
- $\langle u + w, v\rangle = (u_1 + w_1)^2 v_1^2 + (u_2 + w_2)^2 v_2^2 + (u_3 + w_3)^2 v_3^2 \neq u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2 + w_1^2 v_1^2 + w_2^2 v_2^2 + w_3^2 v_3^2 = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$
- $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha^2 u_1^2 v_1^2 + \alpha^2 u_2^2 v_2^2 + \alpha^2 u_3^2 v_3^2 \neq \alpha(u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2) = \alpha\langle u, v\rangle$
- $\langle u, u\rangle = u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 \geq 0$ és $\langle u, u\rangle = 0$ pontosan akkor, ha $u = 0$.

Tehát ez nem skalárszorzat, mivel nem bilineáris.

4. Az euklidészi skalárszorzat szerint számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát, a köztük lévő távolságot, majd döntsük el, hogy merőlegesek-e!

   (a) $u = (2, -1)$, $v = (1, 2)$

   (b) $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 6, 0)$

   Megoldás. Az euklidészi skalárszorzat $\mathbb{R}^n$-en:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

   Két vektor pontosan akkor merőleges, ha a skalárszorzatuk nulla.

   A vektor hossza:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

   Két vektor távolsága a különbségük hossza: $d(u, v) = \|u - v\|$.

   (a)

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5},\\
\|v\| &= \sqrt{1+4} = \sqrt{5},\\
d(u,v) &= \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10},\\
\langle u, v\rangle &= 2 - 2 = 0, \text{ azaz merőlegesek.}
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3},\\
\|v\| &= \sqrt{4+36+0} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},\\
d(u,v) &= \sqrt{(1-2)^2 + (1-6)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},\\
\langle u, v\rangle &= 2 + 6 - 0 = 8 \neq 0, \text{ azaz nem merőlegesek.}
\end{aligned}$$

5. Legyen $\|\cdot\|$ a szokásos vektorhossz, $u = (0, 2, 1)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (0, 1, 0)$. Mivel egyenlőek az alábbiak?

   (a) $\|u + 2v + w\|$

   (b) $\|u\| + 2\|v\| + \|w\|$

   (c) $\|-2u\|$

   (d) $-2\|u\|$

   Megoldás.

   (a) $\|u+2v+w\| = \|(0,2,1)+(2,2,2)+(0,1,0)\| = \|(2,5,3)\| = \sqrt{2^2+5^2+3^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$

   (b) $\|u\|+2\|v\|+\|w\| = \sqrt{0^2+2^2+1^2}+2\sqrt{1^2+1^2+1^2}+\sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1+\sqrt{5}+2\sqrt{3} \approx 6.7$

(c) $\|-2u\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

(d) $-2\|u\| = -2\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = 2\sqrt{5} = -\sqrt{20}$

Gyakorlófeladatok.

1. Keressük meg az alábbi mátrix sorainak egy bázisát, az oszlopainak egy bázisát, és határozzuk meg a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eredmény. A rang 2. Az oszloptér egy bázisa:

$$o_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad o_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sortér egy bázisa:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Döntsük el, hogy

(a) $\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$

(b) $\langle u, v \rangle = 10u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$

skalárszorzatot határoz-e meg $\mathbb{R}^4$-en!

Eredmény.

(a) Nem. (Ugyanis nem pozitív definit.)

(b) Igen.

3. Legyen $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Igazoljuk, hogy a $\langle p, q \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ képlettel definiált művelet skalárszorzat a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok terén!

Amennyiben $p = 3 - 4x^2$, számítsuk ki ennek a skalárszorzatnak a segítségével $\|p\|$-t!

Eredmény. $\|p\| = 5$.

4. Lássuk be, hogy a 2π szerint periodikus, integrálható függvények terén a

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

művelet skalárszorzat. Számítsuk ki az alábbi függvények skalárszorzatát:

(a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \sin kx$, $g(x) = \sin lx$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$

Eredmény.

(a) 0

(b) 0, ha $k \neq l$, és π, ha $k = l$

5. Legyen $u = (2, 0, 1, 3)$, $v = (-1, 4, 6, 6)$. Az euklidészi skalárszorzat segítségével határozzuk meg

   (a) u és v távolságát,

   (b) hogy u és v merőleges-e egymásra,

   (c) $\|u + v\|$ és $\|u\| + \|v\|$ értékét,

   (d) $\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ értékét!

   Eredmények.

   (a) $\sqrt{59}$

   (b) nem

   (c) $\|u + v\| = \sqrt{147}$, $\|u\| = \sqrt{14}$, $\|v\| = \sqrt{89}$

   (d) 22