

MATEMATIKA A2A VEKTORFÜGGVÉNYEK – ÉPÍTŐMÉRNÖKÖKNEK

7. Gyakorlat megoldásai

1. Keressük meg az alábbi mátrix sorterének egy bázisát, az oszlopterének egy bázisát, és határozzuk meg a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A mátrix rangja a sortér (sorvektorok által kifeszített altér) dimenziója, vagy másképp tekintve az oszloptér (oszlopvektorok által kifeszített altér) dimenziója.

Keressük meg először a sortér egy bázisát. Ezt megkaphatjuk Gauss-eliminációs lépések segítségével. Vonjuk le a harmadik sorból az első és a második sort.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a harmadik sor lineárisan függött az első és második sortól. Viszont az első és második sor függetlenek, mivel nem egymás számszorosai. Így a

$$s_1 = [1 \quad 1 \quad 2], \quad s_2 = [1 \quad 0 \quad 1]$$

vektorok a sortér egy bázisát alkotják (mert ez egy maximális független rendszer). Ebből már látszik, hogy a mátrix rangja 2 lesz.

Az oszloptér bázisának meghatározásához végezzünk Gauss-eliminációs lépéseket az *oszlopokon*. Vonjuk le az első és második oszlopot a harmadik oszlopból.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a harmadik oszlop lineárisan függött az első és második oszloptól. Viszont az első és második oszlop függetlenek, mivel nem egymás számszorosai. Így a

$$o_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad o_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok az oszloptér egy bázisát alkotják (mert ez egy maximális független rendszer).

2. Az alábbi megadott információk szerint határozzuk meg, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány szabad paramétere van!

	A mérete	A rangja	$[A b]$ rangja
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	5×9	2	2
(d)	4×4	0	0

Megoldás. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Az $Ax = b$ egyenletrendszernek pontosan akkor

- van egyértelmű megoldása, ha $\text{rang}A = \text{rang}[A|b] = n$,
- van végtelen sok megoldása, ha $\text{rang}A = \text{rang}[A|b] = k < n$ (ekkor a szabad paraméterek száma $n - k$),
- nincs megoldása, ha $\text{rang}A \neq \text{rang}[A|b]$.

- (a) Ebben az esetben $n = 3$ és $\text{rang}A = \text{rang}[A|b] = 3$, tehát a megoldás egyértelmű.
 (b) Ebben az esetben $\text{rang}A \neq \text{rang}[A|b]$, tehát nincs megoldás.
 (c) Ebben az esetben $n = 9$ és $\text{rang}A = \text{rang}[A|b] = 2$, tehát végtelen sok megoldás van, a szabad paraméterek száma $9 - 2 = 7$.
 (d) Egy mátrix rangja csak akkor lehet nulla, ha nullmátrix. Tehát most egy olyan egyenletrendszerrel van dolgunk, ahol az együttható mátrix nullmátrix, a jobboldal pedig nullvektor. Ezt az egyenletrendszert tetszőleges $x \in \mathbb{R}^4$ vektor kielégíti. Ezt mondhatjuk úgy is, hogy végtelen sok megoldás van 4 szabad paraméterrel.

3. Legyen $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Döntsük el, hogy

$$\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$$

skalárszorzatot határoz-e meg \mathbb{R}^3 -on!

Megoldás. Egy V vektortérben skalárszorzatnak nevezünk egy olyan műveletet, amely két vektorhoz egy valós számot rendel, továbbá teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \forall u, v \in V$,
- $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle \forall u, v, w \in V$,
- $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$,
- $\langle u, u \rangle \geq 0 \forall u \in V$ és $\langle u, u \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $u = 0$.

Ellenőrizzük, hogy a mi esetünkben teljesülnek-e ezek a tulajdonságok!

- $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 = 2v_1u_1 + v_2u_2 + 4v_3u_3 = \langle v, u \rangle$
- $\langle u + w, v \rangle = 2(u_1 + w_1)v_1 + (u_2 + w_2)v_2 + 4(u_3 + w_3)v_3 = (2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3) + (2w_1v_1 + w_2v_2 + 4w_3v_3) = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
- $\langle \alpha u, v \rangle = 2\alpha u_1v_1 + \alpha u_2v_2 + 4\alpha u_3v_3 = \alpha(2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3) = \alpha \langle u, v \rangle$
- $\langle u, u \rangle = 2u_1^2 + u_2^2 + 4u_3^2 \geq 0$ és $\langle u, u \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $u = 0$.

Tehát ez skalárszorzat.

4. Az euklidészi skalárszorzat szerint számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát, a köztük lévő távolságot, majd döntsük el, hogy merőlegesek-e!

(a) $u = (2, -1), v = (1, 2)$

(b) $u = (1, 1, -1), v = (2, 6, 0)$

Megoldás. Az euklidészi skalárszorzat \mathbb{R}^n -en:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Két vektor pontosan akkor merőleges, ha a skalárszorzatuk nulla.

A vektor hossza:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Két vektor távolsága a különbségük hossza: $d(u, v) = \|u - v\|$.

(a)

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}, \\ \|v\| &= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}, \\ d(u, v) &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{10}, \\ \langle u, v \rangle &= 2 - 2 = 0, \text{ azaz merőlegesek.}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}, \\ \|v\| &= \sqrt{4 + 36 + 0} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \\ d(u, v) &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 6)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \\ \langle u, v \rangle &= 2 + 6 - 0 = 8 \neq 0, \text{ azaz nem merőlegesek.}\end{aligned}$$

Gyakorlófeladatok.

1. Keressük meg az alábbi mátrix sorainak egy bázisát, az oszlopainak egy bázisát, és határozzuk meg a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eredmény. A rang 2. Az oszloptér egy bázisa:

$$o_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad o_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sortér egy bázisa:

$$s_1 = [1 \quad -2 \quad -4 \quad 3], \quad s_2 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 3]$$

2. Legyen $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Igazoljuk, hogy a $\langle p, q \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ képlettel definiált művelet skalárszorzat a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok terén!

Amennyiben $p = 3 - 4x^2$, számítsuk ki ennek a skalárszorzatnak a segítségével $\|p\|$ -t!

Eredmény. $\|p\| = 5$.

3. Lássuk be, hogy a 2π szerint periodikus, integrálható függvények terén a

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

művelet skalárszorzat. Számítsuk ki az alábbi függvények skalárszorzatát:

(a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \sin kx$, $g(x) = \sin lx$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$

Eredmény.

(a) 0

(b) 0, ha $k \neq l$, és π , ha $k = l$

4. Legyen $u = (2, 0, 1, 3)$, $v = (-1, 4, 6, 6)$. Az euklidészi skalárszorzat segítségével határozzuk meg

(a) u és v távolságát,

(b) hogy u és v merőleges-e egymásra,

(c) $\|u + v\|$ és $\|u\| + \|v\|$ értékét,

(d) $\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ értékét!

Eredmények.

(a) $\sqrt{59}$

(b) nem

(c) $\|u + v\| = \sqrt{147}$, $\|u\| = \sqrt{14}$, $\|v\| = \sqrt{89}$

(d) 22