

MATEMATIKA A2A VEKTORFÜGGVÉNYEK – ÉPÍTŐMÉRNÖKÖKNEK

7. Gyakorlat

1. Keressük meg az alábbi mátrix sorterének egy bázisát, az oszlopterének egy bázisát, és határozzuk meg a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Az alábbi megadott információk szerint határozzuk meg, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány szabad paramétere van!

	A mérete	A rangja	$[A b]$ rangja
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	5×9	2	2
(d)	4×4	0	0

3. Legyen $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Döntsük el, hogy

$$\langle u, v \rangle = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2$$

skalárszorzatot határoz-e meg \mathbb{R}^3 -on!

4. Az euklidészi skalárszorzat szerint számítsuk ki az alábbi vektorok hosszát, a köztük lévő távolságot, majd döntsük el, hogy merőlegesek-e!

(a) $u = (2, -1)$, $v = (1, 2)$

(b) $u = (1, 1, -1)$, $v = (2, 6, 0)$

(c) $u = (a, b, c)$, $v = (0, 0, 0)$

5. Legyen $\|\cdot\|$ a szokásos vektorhossz, $u = (0, 2, 1)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (0, 1, 0)$. Mivel egyenlők az alábbiak?

(a) $\|u + 2v + w\|$

(b) $\|u\| + 2\|v\| + \|w\|$

(c) $\|-2u\|$

(d) $-2\|u\|$

Gyakorlófeladatok.

1. Keressük meg az alábbi mátrix sorainak egy bázisát, az oszlopainak egy bázisát, és határozzuk meg a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Legyen $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Döntsük el, hogy

(a) $\langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$

(b) $\langle u, v \rangle = 10u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$

skalárszorzatot határoz-e meg \mathbb{R}^4 -en!

3. Legyen $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $q = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Igazoljuk, hogy a $\langle p, q \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ képlettel definiált művelet skalárszorzat a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok terén!

Amennyiben $p = 3 - 4x^2$, számítsuk ki ennek a skalárszorzatnak a segítségével $\|p\|$ -t!

4. Lássuk be, hogy a 2π szerint periodikus, integrálható függvények terén a

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx$$

művelet skalárszorzat. Számítsuk ki az alábbi függvények skalárszorzatát:

(a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \sin kx$, $g(x) = \sin lx$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$

5. Legyen $u = (2, 0, 1, 3)$, $v = (-1, 4, 6, 6)$. Az euklidészi skalárszorzat segítségével határozzuk meg

(a) u és v távolságát,

(b) hogy u és v merőleges-e egymásra,

(c) $\|u + v\|$ és $\|u\| + \|v\|$ értékét,

(d) $\frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ értékét!