Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

6. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak vektorteret a szokásos műveletekkel! A vektorterek esetében határozzunk meg egy bázist is!

   (a) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a második koordináta 1.

   (b) A másodfokú valós együtthatós polinomok.

   (c) A legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok.

   (d) Azok a legfeljebb másodfokú p polinomok, amelyekre $p(0) = 2$.

   (e) A 2×2 valós elemű mátrixok.

   Megoldás. Egy V halmaz elemei vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett a $\oplus$ (összeadás), $\odot$ (skalárral szorzás) műveletekre nézve, ha

   - bármely $u, v \in V$ esetén $u \oplus v \in V$,
   - bármely $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha \odot v \in V$.

   (Azaz az alaphalmaz elemeinek összeadása és számmal szorzása nem vezet ki az alaphalmazból.) Továbbá a $\oplus$ és a $\odot$ művelek teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

   (A1) $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$, $\forall\ u, v, w \in V$,

   (A2) $u \oplus v = v \oplus u$, $\forall\ u, v \in V$,

   (A3) létezik a 0 nullelem, melyre $v \oplus 0 = v$, $\forall\ v \in V$,

   (A4) létezik $-v$ ellentett elem, melyre $v \oplus (-v) = 0$, $\forall\ v \in V$.

   (B1) $a \odot (b \odot v) = (a \cdot b) \odot v$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

   (B2) $a \odot (u \oplus v) = a \odot u \oplus a \odot v$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$,

   (B3) $(a + b) \odot v = a \odot v \oplus b \odot v$, $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

   (a) Jelen esetben az alaphalmaz $V = \mathbb{R}^3$, a $\oplus$ művelet a vektorok elemenkénti összeadása, a $\odot$ művelet pedig a vektorok elemenkénti számmal szorzása. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-nek egy olyan vektorát, melynek a második koordinátája 1. Ha megszorozzuk egy 1-től különböző valós számmal, már nem lesz 1 a második koordinátája. Azaz a valós számmal szorzás kivezet az alaphalmazból, tehát ez nem vektortér.

(b) Jelen esetben az alaphalmaz a legfeljebb másodfokú polinomok halmaza, az összeadás és a számmal szorzás is együtthatónként történik, azaz

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (b_2x^2 + b_1x + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$
$$c \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0) = (ca_2)x^2 + (ca_1)x + (ca_0).$$

Mivel $x^2 \oplus -x^2 + x = x$ például nem másodfokú polinom, ezért ez nem egy vektortér.

(c) Viszont két *legfeljebb* másodfokú polinom összege egy *legfeljebb* másodfokú polinom, és egy *legfeljebb* másodfokú polinom skalárszorosa is egy *legfeljebb* másodfokú polinom.

A műveletekre vonatkozó követelmények természetesen teljesülnek, de hogy lássunk ilyet is, kiírom ennek bizonyítását részletesen:

(A1)

$$\begin{aligned}
&(a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus ((b_2x^2 + b_1x + b_0) \oplus (c_2x^2 + c_1x + c_0))\\
=&(a_2 + (b_2 + c_2))x^2 + (a_1 + (b_1 + c_1))x + (a_0 + (b_0 + c_0))\\
=&((a_2 + b_2) + c_2)x^2 + ((a_1 + b_1) + c_1)x + ((a_0 + b_0) + c_0)\\
=&((a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (b_2x^2 + b_1x + b_0)) \oplus (c_2x^2 + c_1x + c_0)
\end{aligned}$$

(A2)

$$\begin{aligned}
&(a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (b_2x^2 + b_1x + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)\\
=&(b_2 + a_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_0 + a_0) = (b_2x^2 + b_1x + b_0) \oplus (a_2x^2 + a_1x + a_0)
\end{aligned}$$

(A3)

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus 0 = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(A4)

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (-a_2x^2 - a_1x - a_0) = (a_2 - a_2)x^2 + (a_1 - a_1)x + (a_0 - a_0) = 0$$

Valamint:

(B1)

$$\begin{aligned}
&a \odot (b \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0)) = (a(ba_2))x^2 + (a(ba_1))x + (a(ba_0))\\
=&((ab)a_2)x^2 + ((ab)a_1)x + ((ab)a_0) = (ab) \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0)
\end{aligned}$$

(B2)

$$\begin{aligned}
&a \odot ((a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (b_2x^2 + b_1x + b_0))\\
=&(a(a_2 + b_2))x^2 + (a(a_1 + b_1))x + (a(a_0 + b_0))\\
=&(aa_2 + ab_2)x^2 + (aa_1 + ab_1)x + (aa_0 + ab_0)\\
=&a \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus a \odot (b_2x^2 + b_1x + b_0)
\end{aligned}$$

(B3)

$$\begin{aligned}
&(a + b) \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0)\\
=&((a + b)a_2)x^2 + ((a + b)a_1)x + ((a + b)a_0)\\
=&(aa_2 + ba_2)x^2 + (aa_1 + ba_1)x + (aa_0 + ba_0)\\
=&a \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus b \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0)
\end{aligned}$$

Tehát ez vektortér.

A bázis egy olyan minimális elemszámú vektorhalmaz, amely elemeinek megfelelő lineáris kombinációja kiadja a vektortér bármely elemét ($v_1, \ldots, v_n$ vektorok lineáris kombinációja: $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ valós számok.) Ebben az esetben a

$$v_1 = x^2, \quad v_2 = x, \quad v_3 = 1$$

vektorok bázist adnak, hiszen bármely legfeljebb másodfokú polinom előáll mint $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$ megfelelő α-kal.

(d) Jelen esetben az alaphalmaz az olyan legfeljebb másodfokú p polinomok halmaza ahol $p(0) = 2$, az összeadás és a számmal szorzás is együtthatónként történik, azaz

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) \oplus (b_2x^2 + b_1x + b_0) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$
$$c \odot (a_2x^2 + a_1x + a_0) = (ca_2)x^2 + (ca_1)x + (ca_0).$$

Pontosan akkor teljesül $p(0) = 2$, ha $a_0 = 2$. De ha p-t 1-től különböző valós számmal szorzom fel, akkor a kapott polinom konstans tagja már nem lesz 2. Azaz a számmal szorzás kivezet az alaphalmazból, tehát ez nem vektortér.

(e) Műveletek:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+t & b+u \\ c+v & d+w \end{bmatrix},$$
$$\alpha \odot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}.$$

Nyilván vektortér, sem az összeadás, sem a számmal szorzás nem vezet ki. Egy bázis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Döntsük el, hogy az alábbi vektorok lineárisan függetlenek-e, generátorrendszert alkotnak-e, valamint bázist alkotnak-e ($\mathbb{R}^3$-ben)!

(a) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 3, 1)$

(b) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (5, -1, -1)$

(c) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 3, -1)$, $v_3 = (2, 5, 2)$

Megoldás. Vektorok számszorosának összegét a vektorok lineáris kombinációjának hívjuk. Ha egy adott vektorrendszer minden elemét nullával szorzunk, és így adjuk őket össze, akkor nyilván nullát kapunk. Ha a vektorrendszer elemeinek csak ez a lineáris kombinációja adja ki a nullát, akkor azt mondjuk, hogy a vektorok lineárisan függetlenek (egyébként lineárisan összefüggők).

Ha a vektortér bármely elemét megkaphatjuk egy adott vektorrendszer lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszert generátorrendszernek nevezzük.

Ha egy vektorrendszer generátorrendszer és lineárisan független is, akkor bázisnak nevezzük. A bázis egy minimális elemszámú generátorrendszer, maximális elemszámú független rendszer. Egy vektortér minden bázisának elemszáma megegyezik, ezt nevezik a vektortér dimenziójának.

(a) Két vektor pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha egyik a másik számszorosa. Ez most nyilván nem áll fenn, ezért a $\{v_1, v_2\}$ rendszer lineárisan független.

Viszont nem generátorrendszer, mert csak a v_1 és v_2 által kifeszített sík vektorai állnak elő v_1 és v_2 lineáris kombinációjaként, ami közel sem az egész tér.

Tehát nem is alkothatnak bázist.

(b) A vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyértelmű megoldása

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Írjuk át az egyenletünket egy kicsit más alakba!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, tudjuk hogy pontosan akkor egyértelmű a megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nem nulla. Számítsuk ki a determinánst!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 1 - 5 \cdot 11 = -60 \neq 0$$

Tehát a vektorok lineárisan függetlenek. Mivel $\mathbb{R}^3$ dimenziója 3 (gondoljunk a kanonikus bázis elemszámára), ezért minden háromelemű lineárisan független rendszer generátorrendszer is, azaz bázis is.

(c) Hasonlóan az előző feladatrészhez, arra vagyunk kíváncsiak, hogy a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenletnek van-e nemtriviális megoldása. Ebben az esetben

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11 + 11 - 22 = 0$$

Tehát van nemtriviális megoldás, azaz a vektorok lineárisan összefüggőek. (Vagy pedig: vegyük észre, hogy $v_1 + v_2 = v_3$.)

Mivel a vektortér háromdimenziós, három lineárisan összefüggő vektor nem alkothat generátorrendszert. Tehát a vektoraink bázist sem alkotnak.

3. Határozzuk meg $\mathbb{R}^3$ alábbi altereinek egy bázisát!

(a) Az $x - y = 0$ egyenletű sík.

(b) Az $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$ egyenletrendszerű egyenes.

Megoldás. Egy V vektortér altere V elemeinek olyan részhalmaza, amely V műveleteinek megszorításával maga is vektorteret alkot.

(a) Egy minimális elemszámú generátorrendszert keresünk. Egy síkot legalább két vektor tud generálni. Tehát ha veszünk két független (nem párhuzamos) vektort a síkban, akkor bázist kaptunk. Például a

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jó választás.

(b) Egy egyenest már akár egy, az egyenes által tartalmazott vektorral is lehet generálni (ez nyilván független 'vektorrendszer' is, csak a 0-szorosa adja ki a 0-t). Például a $b = (2, -1, 4)$ irányvektor jó lesz.

4. Határozzuk meg $\mathbb{R}^4$ az alábbi vektorok által kifeszített alterének egy bázisát!

$$v_1 = (1, 1, -4, -3), \quad v_2 = (2, 0, 2, -2), \quad v_3 = (2, -1, 3, 2)$$

Megoldás. Írjuk be ezeket a vektorokat egy mátrix soraiba, majd Gauss-eliminációs sorműveletekkel egyszerűsítsük!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & 11 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Mivel nem keletkezett csupa nulla sor, egyik vektor sem függ lineárisan a többitől, tehát akár már az eredeti vektorrendszerünk is bázist alkotott. De a fenti legutolsó mátrix három sora (mint vektor) is bázist alkot, természetesen.

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak vektorteret a szokásos műveletekkel! Ahol vektorteret kaptunk, határozzunk meg egy bázist is!

(a) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a koordináták összege 0.

(b) A 2×2-es, valós szimmetrikus mátrixok.

(c) A 2×2-es, valós szimmetrikus mátrixok, amelyekben nincsen 0.

Eredmények.

(a) Ez egy kétdimenziós vektortér. Bázis:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) Ez egy háromdimenziós vektortér. Bázis:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Ez nem vektortér.

2. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -14 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok bázist alkotnak a 2×2-es valós mátrixok vektorterében!

Tipp. A vektortér négydimenziós, ezért elég megmutatni, hogy a fenti elemek lineárisan függetlenek, azaz csak a triviális lineáris kombinációjuk adja ki a 2×2 nullmátrixot.

3. Mutassuk meg, hogy a $v_1 = (0, 3, 1, -1)$, $v_2 = (6, 0, 5, 1)$, $v_3 = (4, -7, 1, 3)$ vektorok lineárisan összefüggő rendszert alkot $\mathbb{R}^4$-ben! Írjuk fel mindhárom vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként!

Eredmény.

$$v_1 = \frac{2}{7}v_2 - \frac{3}{7}v_3,$$
$$v_2 = \frac{7}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_3,$$
$$v_3 = -\frac{7}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2.$$

4. Határozzuk meg $\mathbb{R}^4$ az alábbi vektorok által kifeszített alterének egy bázisát!

$$v_1 = (1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 0, 1, 1), \quad v_3 = (-2, 0, 2, 2), \quad v_4 = (-3, -1, 3, 3)$$

Eredmény.

$$b_1 = (1, 1, 0, 0), \quad b_2 = (0, 0, 1, 1), \quad b_3 = (-2, 0, 2, 2)$$

5. Határozzuk meg, hogy a b vektor benne van-e az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített térben! Ha benne van, akkor fejezzük ki b-t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eredmény. Igen, együtthatók: $x_1 = 1$, $x_2 = -1 + t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$.