Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

5. Gyakorlat megoldásai

1. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az $(A^T + B)C$ kifejezés értékét!

Megoldás. Az A mátrix transzponáltját úgy kapjuk, hogy felcseréljük a sorok és az oszlopok szerepét, azaz

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixokat elemenként adunk össze, így

$$M = A^T + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az M és C mátrix szorzata egy olyan mátrix, mely i-edik sorának j-edik eleme M i-edik sorának és C j-edik oszlopának skalárszorzata. Tehát:

$$M \cdot C = \begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 4 & 2 \\ & & 3 & 1 & 5 \\ \hline 6 & 4 & 18 & 28 & 32 \\ 3 & 3 & 12 & 15 & 21 \end{array}$$

Azaz

$$(A^T + B)C = \begin{bmatrix} 18 & 28 & 32 \\ 12 & 15 & 21 \end{bmatrix}.$$

2. Elemi sorműveletek segítségével határozzuk meg az a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

Megoldás. Az A mátrix inverze az az A^{-1}-el jelölt mátrix, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, ahol I a megfelelő méretű egységmátrix (ez egy olyan mátrix, aminek az átlójában 1-esek vannak, a többi eleme 0).

A következőképpen kaphatjuk meg A^{-1}-et: beírjuk egy kibővített mátrixba balra A-t, jobbra I-t. Elemi sorműveletekkel elérjük, hogy baloldalon I legyen – ekkor jobboldalon A^{-1} lesz.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Először levontuk az első sor 2-szeresét a második sorból, majd hozzáadtuk az első sor 4-szeresét a harmadik sorhoz. Majd leosztottuk 2-vel a második sort.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 6 & 11 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 10 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{array}\right]$$

Levontuk a második sor 6-szorosát a harmadik sorból, majd az így kapott harmadik sort leosztottuk 17-el.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 6 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{26}{17} & \frac{19}{34} & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{17} & \frac{11}{34} & \frac{1}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{array}\right]$$

Levontuk a második sort az elsőből, majd a harmadik sort hozzáadtuk a másodikhoz, végül a harmadik sor 6-szorosát levontuk az elsőből. Tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{26}{17} & \frac{19}{34} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{7}{17} & \frac{11}{34} & \frac{1}{17} \\ \frac{10}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}.$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az $x = A^{-1}b$ képlet felhasználásával!

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & = & -3 \end{array}$$

Megoldás. Az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az A^{-1} mátrixot:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

(Az első lépésben levontunk az első sor 2-szeresét a második sorból, majd az így kapott második sor kétszeresét levontuk az elsőből.) Azaz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $Ax = b$, ezért $x = A^{-1}b$. Tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 + 6 \\ -14 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

4. Határozzuk meg az alábbi determinánsokat!

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

Megoldás.

(a) Fejtsük ki a determinánst az első sor szerint. Ez a következőt jelenti:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(0-9) - (0-3) + (12-2) = -18 + 3 + 10 = -5.$$

Azaz: vegyük az első sor elemeit felváltva $+/-$ előjellel, és minden elemet szorozzunk meg annak a mátrixnak a determinánsával, amelyet úgy kapunk, hogy elhagyjuk az eredeti mátrixból az elem sorát és oszlopát. A 2×2 determinánsokat pedig a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

szabállyal számoljuk.

(b) Hozzuk felsőháromszög-alakra a mátrixot Gauss-eliminációs lépésekkel, valamint sorcserékkel. A Gauss-eliminációs lépések nem változtatják meg a determináns az értékét, a sorcserék pedig a -1-szeresére változtatják (ezt majd mindig korrigálnunk kell). Felsőháromszög-alakban a determináns az átlóelemek szorzata lesz.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 6) = 6.$$

Első lépésben megcseréltük az első és második sort, ezért -1-szeresére változott a determináns, vissza kellett szoroznunk -1-el, hogy az egyenlőség továbbra is fennálljon. Ezután levontunk az első sor 2-szeresét a második sorból. Majd a második sor kétszeresét vontuk le a harmadik sorból, és 1-szeresét a negyedik sorból. Végül a harmadik sort hozzáadtuk a negyedik sorhoz.

(c) Fejtsük ki a determinánst az első sor szerint.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (2-18) - 2(6-0) + 4(9-0) = -16 - 12 + 36 = 8.$$

Megjegyzés. Mindkét használt módszer értelemszerű általánosítása tetszőleges méretű négyzetes mátrixok esetében alkalmazható. Az előző félévben tanult Sarrus-szabály csak a 3×3 esetben működik!

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 15 \end{array}$$

Megoldás. A Cramer-szabály szerint $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$, ahol A az együtthatómátrix, A_j pedig az együttatómátrix, csak a j-edik oszlopát kicseréltük az egyenletrendszer jobboldalával. Tehát

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2(6-2) + 2(8-6) + 1(8-18) = 8 + 4 - 10 = 2,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ 15 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_1 = 8(6-2) + 2(14-15) + 1(14-45) = 32 - 2 - 31 = -1,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 15 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 2(14-15) - 8(8-6) + 1(60-42) = -2 - 16 + 18 = 0,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_2 = 2(45-14) + 2(60-42) + 8(8-18) = 62 + 36 - 80 = 18.$$

Tehát $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{0}{2} = 0$, $x_3 = \frac{18}{2} = 9$.

Gyakorlófeladatok.

1. Az órai 1. feladat A és B mátrixát felhasználva határozzuk meg az $A^T B^T - (BA)^T$ mátrixot!

   Eredmény.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2*. Legyen

$$R = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az R^2, R^{2018}, R^{-1}, R^{-2018} mátrixokat! Határozzuk meg a determinánsukat!

Tipp. Használjunk teljes indukciót és idézzük fel a trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételeket!

3. Határozzuk meg A^n, $n \in \mathbb{N}$ mátrixot, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eredmény.

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix},$$

ahol $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ a Fibonacci-számok.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az $x = A^{-1}b$ képlet felhasználásával!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 1 \end{array}$$

Eredmény. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $x_1 = -\frac{9}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$

5. Határozzuk meg az alábbi determinánsokat!

(a) $\begin{vmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Eredmények.

(a) $k^3 - 8k^2 - 10k + 95$

(b) -21

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & -3 \end{array}$$

Eredmény. $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$