Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

4. Gyakorlat megoldásai

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss–Jordan módszerrel!

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -15 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \\ 11x_1 & + & 7x_2 & & & = & -29 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Megoldás. Írjuk fel az egyenletrendszerek kibővített mátrixos alakját! Tehát, írjuk be az egyenletrendszer együtthatóit és jobboldalát egy táblázatba, ezután az egyenletrendszer megoldásának szokásos lépéseit (egyenletek összeadása, számmal szorzása) ebben a táblázatban végezzük el!

(a) Első lépésben adjuk hozzá az első sort (egyenletet) a második sorhoz (egyenlethez), valamint vonjuk le az első sor 3-szorosát a harmadik sorból. Az egyenletrendszerben gondolkodva az történt, hogy eltüntettük az x_1 változót a második és harmadik egyenletből, az első egyenletben pedig 1 együtthatóval szerepel.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right]$$

Ezután szorozzuk be -1-el a második sort, majd vonjuk le az így kapott második sort az első sorból, és adjuk hozzá a 10-szeresét a harmadik sorhoz. Így az első és harmadik egyenletből eltűnt az x_2 változó, a második egyenletben pedig 1 együtthatóval szerepel.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right]$$

Végül osszuk le -52-vel az utolsó sort, és az így kapott sor 5-szörösét adjuk hozzá a második sorhoz, a 7-szeresét pedig vonjuk le az első sorból. Ezzel az első és második egyenletből eltűnt az x_3 változó, a harmadik egyenletben pedig 1 együtthatóval szerepel.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Az így kapott táblázat a következő egyenletrendszernek felel meg:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 2$$

Tehát ez a megoldás.

(b) Osszuk le az első sort 3-al, majd az így kapott sor 5-szörösét vonjuk le a második sorból, a 3-szorosát a második sorból, valamint a 11-szeresét a harmadik sorból.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -15 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ 11 & 7 & 0 & -29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 25 \\ 0 & -1 & 4 & 26 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & 26 \end{array}\right]$$

Vegyük észre, hogy a második sor szerint

$$-\frac{1}{3}x_2 + \frac{11}{3}x_3 = 25,$$

de a harmadik sor szerint

$$-\frac{1}{3}x_2 + \frac{11}{3}x_3 = 26.$$

Ez ellentmondás, tehát nincs megoldás.

(c) Vonjuk le az első sor kétszeresét a másodikból. Osszuk le az így kapott második sort -16-al. Majd vonjuk le a második sor 6-szorosát az elsőből.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -16 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{16} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{16} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{16} & 0 \end{array}\right]$$

Így a következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & \frac{2}{16}z & = & 0 \\ & & x_2 & - & \frac{5}{16}x_3 & = & 0 \end{array}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = \frac{2}{16}t$, $x_2 = \frac{5}{16}t$, $x_3 = t$, $(t \in \mathbb{R})$.

2. Az a paraméter mely értéke mellett lesz az alábbi lineáris egyenletrendszereknek egyértelmű megoldása? Mely értékek mellett lesz végtelen sok megoldás? Mely értékek mellett nem lesz megoldás?

(a) $$\begin{array}{ccccc} (a-3)x & + & y & = & 0 \\ x & + & (a-3)y & = & 0 \end{array}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}$$

Megoldás.

(a) Az $a = 3$ esetben nyilván egyértelmű a megoldás, ekkor $x = 0$, $y = 0$. Ha $a \neq 3$, akkor osszuk le az első egyenletet $(a-3)$-al. az így kapott sort vonjuk le a második sorból.

$$\left[\begin{array}{cc|c} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & a-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a-3} & 0 \\ 1 & a-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a-3} & 0 \\ 0 & \frac{a^2-6a+8}{a-3} & 0 \end{array}\right]$$

Először tegyük fel, hogy $\frac{a^2-6a+8}{a-3} \neq 0$ (ez pontosan akkor teljesül, ha $a \neq 2, 4$) Ekkor osszuk le vele a második sort, és az így kapott sor $\frac{1}{a-3}$-szorosát vonjuk le az elsőből.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a-3} & 0 \\ 0 & \frac{a^2-6a+8}{a-3} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a-3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát ebben az esetben a megoldás egyértelműen $x = 0$, $y = 0$.
Nézzük meg mi van abban az esetben, ha $\frac{a^2-6a+8}{a-3} = 0$, azaz ha $a = 2$ vagy $a = 4$. Ekkor

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{a-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azaz

$$x + \frac{y}{a-3} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (3-a)x.$$

Így végtelen sok megoldás van, melyek $x = t$, $y = (3-a)t$, $(t \in \mathbb{R})$ alakúak.

Foglaljuk össze mit kaptunk: $a = 2$ esetén a (t, t) alakú számpárok elégítik ki az egyenletrendszert, az $a = 4$ esetén pedig a $(t, -t)$ alakú számpárok, ahol t tetszőleges valós szám lehet. Tehát ezen két a érték esetén végtelen sok megoldás van. Minden más a érték esetén az $(x, y) = (0, 0)$ egyértelmű megoldás.

(b) Először az első sor 3-szorosát kivonjuk a második sorból, majd a 4-szeresét kivonjuk a harmadik sorból. Az így kapott második sort leosztjuk -7-el. Ezután a kétszeresét levonjuk az első sorból, és a 7-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right]$$

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $a = 4$. Ekkor

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

azaz

$$x + z = \frac{8}{7}$$
$$y - 2z = \frac{10}{7}.$$

Végtelen sok megoldás van, melyek $x = \frac{8}{7} - t$, $y = \frac{10}{7} + 2t$, $z = t$, $(t \in \mathbb{R})$ alakúak.
Most vizsgáljuk meg az $a = -4$ esetet. Ekkor

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right].$$

Az utolsó sor szerint $0 = -8$, ami nyilván ellentmondás, így ebben az esetben nincs megoldás.
Térjünk végül arra az esetre, amikor $a \neq \pm 4$. Ekkor $a^2 - 16 \neq 0$, osszuk le vele a harmadik sort. Vonjuk le az így kapott sort az első sorból, és adjuk hozzá a 2-szeresét a második sorhoz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+4} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{7} - \frac{1}{a+4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} + \frac{2}{a+4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+4} \end{array}\right]$$

Tehát ebben az esetben egyértelmű a megoldás, mégpedig a következő:

$$x = \frac{8a+25}{7a+28},$$
$$y = \frac{10a+54}{7a+28},$$
$$z = \frac{1}{a+4}.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss–Jordan módszerrel!

(a)
$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

Eredmények

(a) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

(b) $x_1 = 1 - 3t$, $x_2 = t$, $x_3 = 5t - 1$, $(t \in \mathbb{R})$

2. Az a paraméter mely értéke mellett lesz az alábbi lineáris egyenletrendszereknek egyértelmű megoldása? Mely értékek mellett lesz végtelen sok megoldás? Mely értékek mellett nem lesz megoldás?

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & a \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 3y & + & 5z & = & -1 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 11y & + & 9z & = & 3 \end{array}$$

Eredmények.

(a)
- $a \neq 2:$ nincs megoldás
- $a = 2:\ x = t,\ y = 3 - t,\ z = 1,\ t \in \mathbb{R}$

(b)
- $a = 2:\ x = 2(6 - 7t),\ y = t,\ z = 5(t - 1),\ t \in \mathbb{R}$
- $a \neq 2:\ x = 0,\ y = \frac{6}{7},\ z = -\frac{5}{7}$