Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

3. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát!

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha} \quad 0 \le x < \pi \\ 0, & \text{ha} \quad \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$
   2π-periodikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re,

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
   2π-periodikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re,

   (c)
   $$f(x) = x^2, \quad \text{ha } |x| < \pi$$
   2π-periodikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re.

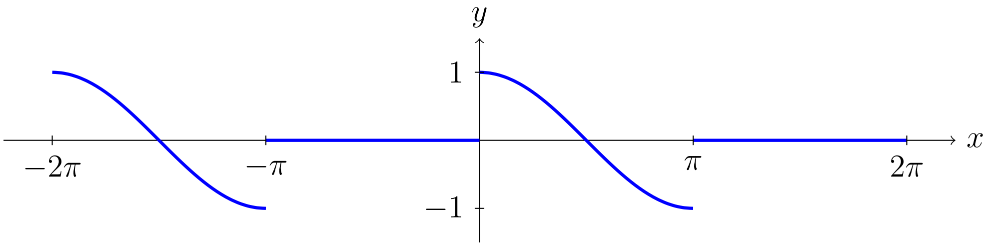
Megoldás. A 2π-periodikus f függvény Fourier-sora

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\ \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ha f páratlan függvény, akkor $a_k = 0$ minden k-ra, ha f páros függvény, akkor $b_k = 0$ minden k-ra.



1. ábra. Az 1. (a) feladatbeli f grafikonja

(a)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos x \ \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2\pi}[\sin x]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(0-0) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \cos kx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos((k+1)x)+\cos((k-1)x)}{2} \ \mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(2x)+1}{2} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin 2x}{2} + x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot \pi = \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad k=1 \\ = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k+1)x)}{(k+1)} + \frac{\sin((k-1)x)}{(k-1)}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 0 = 0, & \text{ha} \quad k>1 \end{cases}$$

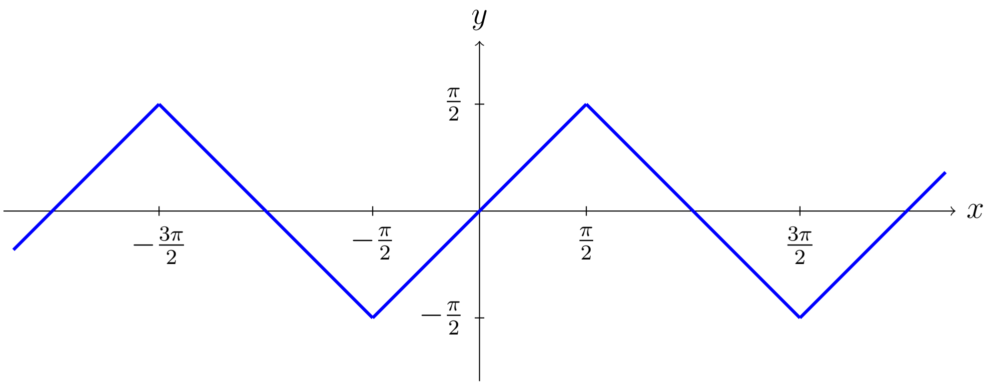
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin kx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((k+1)x)+\sin((k-1)x)}{2} \ \mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2x)}{2} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 0 = 0, & \text{ha} \quad k=1 \\ = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((k+1)x)}{(k+1)} - \frac{\cos((k-1)x)}{(k-1)}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot \frac{k(1+(-1)^k)}{k^2-1}, & \text{ha} \quad k>1 \end{cases}$$

Tehát a Fourier-sor:

$$\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(1+(-1)^k)}{k^2-1}\sin kx = \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\ell}{4\ell^2-1}\sin 2\ell x.$$

(b) Vegyük észre, hogy f páratlan függvény, ezért $a_k = 0$ bármely $k \geq 0$ esetén.



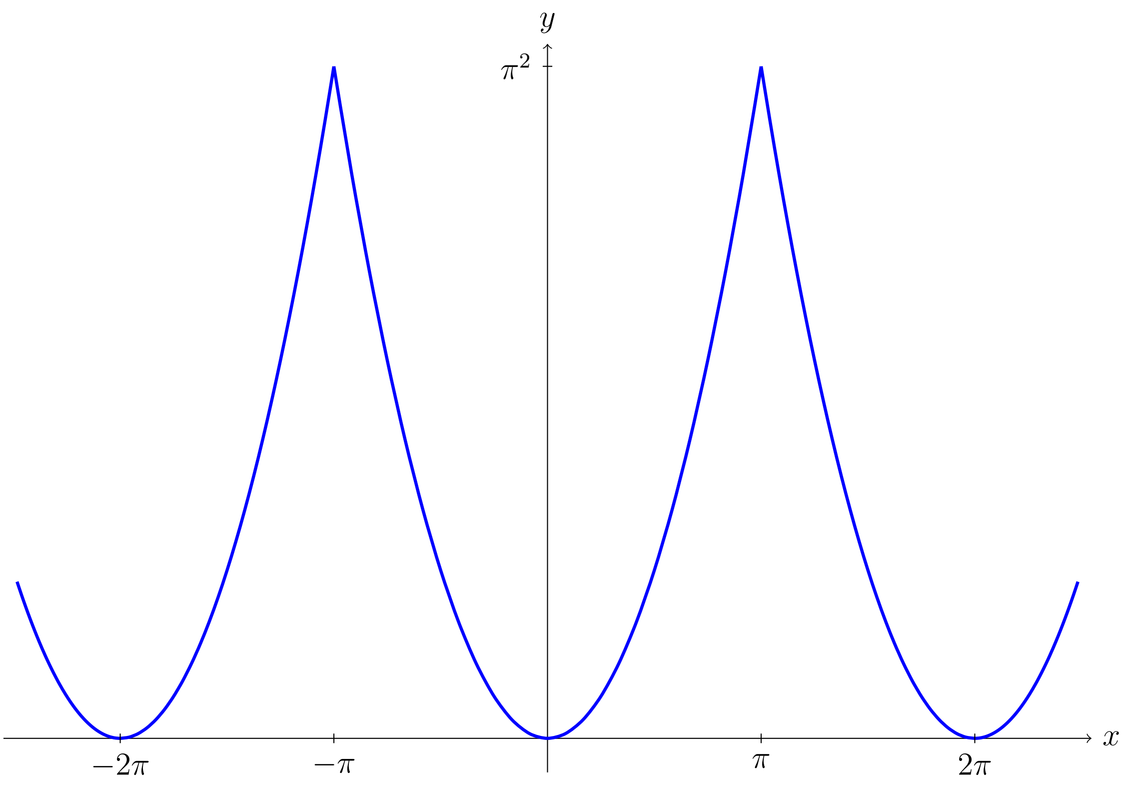
2. ábra. Az 1. (b) feladatbeli f grafikonja

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin kx\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x)\sin kx\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos kx}{k}\ \mathrm{d}x\right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[-(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos kx}{k}\ \mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[-(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right)\\
&= \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros}\\ \frac{4}{k^2\pi}, & \text{ha } k = 4n+1 \text{ alakú}\\ -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{ha } k = 4n+3 \text{ alakú}\end{cases}
\end{aligned}$$

Tehát a Fourier-sor:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^2}\sin((2\ell+1)x)$$

(c) Vegyük észre, hogy f páros függvény, ezért $b_k = 0$ bármely $k \geq 0$ esetén.



3. ábra. Az 1. (c) feladatbeli f grafikonja

A nulladik együttható:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3},$$

valamint

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\sin kx}{k}\ \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\sin kx}{k}\ \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos kx}{k^2}\ \mathrm{d}x\right) = \frac{2}{\pi}\left[x\cdot\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\cdot\frac{\cos kx}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin kx}{k^3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi(-1)^k + 2\pi(-1)^k}{\pi k^2} = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Tehát a Fourier-sor:

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{\ell^2}\cos(\ell x).$$

2. Számítsuk ki az alábbi végtelen sor összegét!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Megoldás. Használjuk az 1. feladat (b) részét! Mivel f folytonos, ezért a Fourier-sora minden x pontban előállítja a függvényértéket. Konkrétan az $x = \frac{\pi}{2}$ pontban ez a következőt jelenti:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2\ell+1)\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^2}(-1)^\ell = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^2},$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát!

(a) $\cos^2 x + \sin(-x)$

(b) $\sin 5x \cos 2x$

Megoldás. Használjuk a linearizációs formulákat!

(a) Mivel

$$\cos^2 x + \sin(-x) = \frac{1+\cos 2x}{2} - \sin x = \frac{1}{2} - \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

ezért a függvény Fourier-sora:

$$\frac{1}{2} - \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

(b) Mivel

$$\sin 5x \cos 2x = \frac{\sin 3x + \sin 7x}{2} = \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 7x,$$

ezért a függvény Fourier-sora

$$\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin 7x.$$

4. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$

2-periodikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re. Határozzuk meg a Fourier-sorát!

Megoldás. A T-periodikus f függvény Fourier-sora

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) \right),$$

ahol

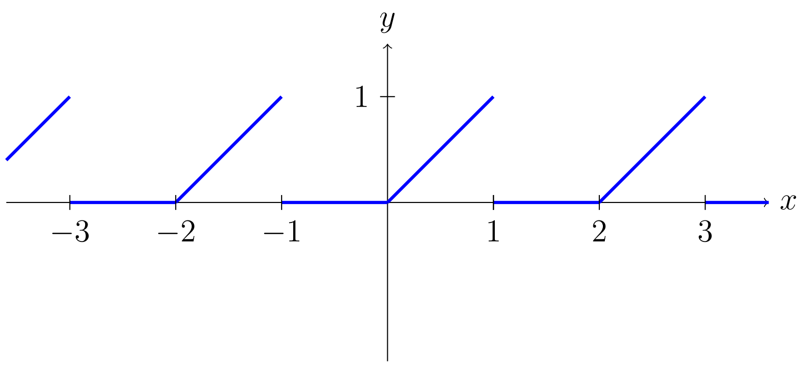
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \, \mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) \, \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{T} x\right) \, \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Tehát most

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}, \\ a_k &= \int_0^1 x \cos k\pi x \, \mathrm{d}x = \left[x \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2} \right]_0^1 = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}, \\ b_k &= \int_0^1 x \sin k\pi x \, \mathrm{d}x = \left[-x \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \left[\frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}. \end{aligned}$$

Így a Fourier-sor:

$$\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi x) \right).$$



4. ábra. A 4. feladatbeli f grafikonja

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát!

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$
   2π-periodikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re

   (b) $f(x) = |\sin x|$

   (c) $f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$

   (d) $f(x) = \sin 5x(\sin 6x + \cos 4x)$

   (e)
   $$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha} \quad 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{ha} \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$
   2-periodikus kiterjesztése $\mathbb{R}$-re

   Eredmények.

   (a)
   $$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)x)$$

   (b)
   $$\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{1-k^2} \cos kx$$

   (c)
   $$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sin x - \frac{\cos 2x}{x} - \frac{\sin 3x}{4}$$

   (d)
   $$\frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 9x}{2} - \frac{\cos 11x}{2}$$

   (e)
   $$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \pi x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1-k^2)} \cos (k\pi x)$$

2. Számítsuk ki az alábbi végtelen sor összegét!
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

   Eredmény.
   $$\frac{\pi^2}{6}$$
   Segítség: Ez a gyakorlati feladatsor 2-es feladatából nagyon egyszerűen adódik!