Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

2. Gyakorlat megoldásai

1. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciaintervallumát!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

   Megoldás. Az $r > 0$ (esetleg végtelen!) konvergenciasugár az az érték, amelyre a

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

   hatványsor konvergens az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumon, divergens $\mathbb{R} \backslash [x_0 - r, x_0 + r]$-en. A konvergenciaintervallum széleit mindig külön meg kell vizsgálni, itt bármi lehet. Az r konvergenciasugár a következő képletekkel számítható:

   $$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{vagy} \qquad r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

   (Ezek a gyök- illetve hányadoskritériumból vezethetők le.)

   (a) A mértani sor pontosan akkor konvergens, ha a kvóciens abszolútértékben kisebb mint 1, azaz $|x| < 1$. Tehát a konvergenciaintervallum a $(-1, 1)$.

   (b)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (5x)^n,$$

   és mivel $|5x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{5}$, a konvergenciaintervallum: $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

   (c) Látjuk, hogy $x_0 = 0$, $a_n = \frac{n}{n+2}$. A konvergenciasugár:

   $$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+2}}}.$$

Tudjuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$. Mivel $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+2} < \sqrt[n]{2n}$ elég nagy n-ekre, és $\sqrt[n]{n} \to 1$, valamint $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1$, ezért a rendőr-elv alapján $\sqrt[n]{n+2} \to 1$. Azaz $r = 1$.

Tehát a hatványsor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en divergens. Az $x = 1$ esetben az alábbi végtelen sort kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}.$$

Ennek az összegnek a tagjai nem tartanak 0-hoz, tehát nyilván divergens. Az $x = -1$ esetben a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$$

sort kapjuk, ez is divergens, mert az összeg tagjai ebben az esetben sem tartanak 0-hoz. Tehát a konvergenciaintervallum: $(-1, 1)$.

(d) Látjuk, hogy $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{(2n)!}$. A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2n)!}{1/(2(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = \infty.$$

Tehát a hatványsor konvergenciintervalluma $\mathbb{R}$.

(e) Látjuk, hogy $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$. A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt{(n+1)^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+2n+4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+3/n^2}{1+2/n+4/n^2}} = \sqrt{1} = 1.$$

Tehát a hatványsor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$-en divergens. Az $x = 1$ esetben az alábbi végtelen sort kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}.$$

Mivel $\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, a minoráns kritérium alapján a sor divergens. Az $x = -1$ esetben a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$$

sort kapjuk. Ez egy Leibniz-sor, tehát konvergens. Így a konvergenciaintervallum: $[-1, 1)$.

2. Az x változó mely értékeire konvergens a

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \dots$$

sor? Mi a sor összege? Deriváljuk le ezt a sort tagonként, és vizsgáljuk meg, hogy az így kapott sor x mely értékeire konvergens!

Megoldás. A
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n$$
sor konvergenciaintervallumának középpontja 3, a konvergenciasugara:
$$r=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$
Tehát a $(1,5)$ intervallumon biztosan konvergens. Az $x=1$ helyen a következő sort kapjuk:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot(-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}1,$$
ez divergens. Valamint, az $x=5$ helyen a
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$
sort kapjuk, ami szintén divergens. Tehát a konvergenciaintervallum $(1,5)$.

Ha tagonként deriválunk, akkor a
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot(x-3)-\frac{1}{8}\cdot 3\cdot(x-3)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1)(x-3)^n$$
sort kapjuk. Ennek a sornak a konvergenciaintervallumának középpontja 3, a konvergenciasugara:
$$r=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1)\right|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1/n}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$
Tehát a $(1,5)$ intervallumon biztosan konvergens. Az $x=1$ helyen a következő sort kapjuk:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1)\cdot(-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{n+1}{2},$$
ez divergens, hiszen a tagjai nem tartanak 0-hoz. Valamint, az $x=5$ helyen a
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot(n+1)\cdot 2^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2},$$
sort kapjuk, ami szintén divergens. Tehát a konvergenciaintervallum $(1,5)$.

Ezen nem lepődünk meg, ismert hogy a hatványsor és a tagonkénti deriválással kapott hatványsor konvergenciatartománya megegyezik.

A sorösszeg:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-x}{2}\right)^n=\frac{1}{1-(3-x)/2}=\frac{2}{x-1}.$$

3. Határozzuk meg az f által generált x_0 körüli Taylor-sort!

   (a) $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $x_0 = 0$

   (b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ és $x_0 = 2$

   (c) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$

   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$, $x_0 = 0$, $x \in (-1, 1)$

   (e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x_0 = 0$, $x \in (-1, 1)$

   (f) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $x \in (-1, 1)$

   Megoldás. Az f függvény által generált x_0 körüli Taylor-sor alatt a következő hatványsort értjük:

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

   Ha f 'elég szép', akkor előállítja a 0 körüli Taylor-sora (vagy más néven Maclaurin-sora), azaz $f(x) = T_{f,0}(x)$. Például $\frac{1}{1-x}$ elég szép, ha $x \in (-1, 1)$, ekkor $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ – ez a mértani sor összegképlete. A továbbiakban minden függvény elég szép lesz.

   (a) Mivel

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 5 = -5 \\ f''(0) &= 6 \cdot 0 = 0 \\ f'''(0) &= 6 \\ f^{(n)}(0) &= 0 \qquad n > 3, \end{aligned}$$

   ezért:

$$T_{f,0}(x) = 1 - 5x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{6}{6}x^3 = 1 - 5x + x^3.$$

   (b) Mivel $f^{(n)}(x) = e^x$, így $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, ezért:

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

   valamint $f^{(n)}(2) = e^2$ ezért

$$T_{f,2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{n!}.$$

   (c) Használjuk az előző feladatot, valamint azt a tényt, hogy szorzat Taylor-sora a Taylor-sorok szorzata. Vegyük észre, hogy x eleve hatványsor alakban van. Tehát,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

(d) Először parciális törtekre bontunk.

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3},$$

így $A(x-3)+B(x+1) = 1 \Leftrightarrow (A+B)x + (B-3A) = 1$ kell hogy teljesüljön, azaz $A+B=0$ és $B-3A=1$. Ennek a megoldása $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, tehát

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Mivel

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \text{ ha } \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n, \qquad \text{ha} \quad |x|<3$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n - \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4} - \frac{1}{12\cdot 3^n}\right)x^n,$$

amennyiben $x\in(-1,1)$.

(e) Mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha $x\in(-1,1)$, ezért $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ 0 körüli Taylor-sorát úgy kapjuk, ha a fenti Taylor-sort tagonként lederiváljuk. Így a következőt kapjuk:

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

(f) Mivel tudjuk, hogy ha $x\in(-1,1)$, akkor

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

ezért $\int \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)$ Taylor sorát úgy kapjuk, ha a fenti Taylor-sort tagonként kiintegráljuk. Így:

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

Gyakorlófeladatok.

1. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciaintervallumát!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n^2+3}}$

   Eredmények.

(a) $\mathbb{R}$

(b) $[-1, 1]$

(c) $[2, 4)$

2. Határozzuk meg az f által generált x_0 körüli Taylor-sort!

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \mathrm{arctg} x$, $x_0 = 0$

(c) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$ (segítség: használjuk $\cos x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ linearizációs formulát!)

(d) $f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x_0 = 0$

Eredmények.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(c) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \cdot x^{2n-1}$