Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

2. Gyakorlat megoldásai

1. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciaintervallumát!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

   Megoldás. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

hatványsor konvergens az (x_0-r, x_0+r) intervallumon, divergens $\mathbb{R}\setminus[x_0-r, x_0+r]$-en. A konvergenciaintervallum széleit mindig külön meg kell vizsgálni, itt bármi lehet. Az r konvergenciasugár a következő képletekkel számítható:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{vagy} \qquad r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

(a) Látjuk, hogy $x_0 = 0$, $a_n = \frac{n}{n+2}$. A konvergenciasugár:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+2}}}.$$

Tudjuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$. Mivel $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{n+2} < \sqrt[n]{2n}$ elég nagy n-ekre, és $\sqrt[n]{n} \to 1$, valamint $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1$, ezért a rendőr-elv alapján $\sqrt[n]{n+2} \to 1$. Azaz $r = 1$.

Tehát a hatványsor konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon, $\mathbb{R}\setminus[-1, 1]$-en divergens. Az $x = 1$ esetben az alábbi végtelen sort kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}.$$

Ennek az összegnek a tagjai nem tartanak 0-hoz, tehát nyilván divergens. Az $x = -1$ esetben a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$$

sort kapjuk, ez is divergens, mert az összeg tagjai ebben az esetben sem tartanak 0-hoz. Tehát a konvergenciaintervallum: $(-1, 1)$.

(b) Látjuk, hogy $x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{(2n)!}$. A konvergenciasugár:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2n)!}{1/(2(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = \infty.$$

Tehát a hatványsor konvergenciintervalluma $\mathbb{R}$.

2. Az x változó mely értékeire konvergens a

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \ldots$$

sor? Mi a sor összege? Deriváljuk le ezt a sort tagonként, és vizsgáljuk meg, hogy az így kapott sor x mely értékeire konvergens!

Megoldás. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$$

sor konvergenciaintervallumának középpontja 3, a konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Tehát a $(1,5)$ intervallumon biztosan konvergens. Az $x = 1$ helyen a következő sort kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1,$$

ez divergens. Valamint, az $x = 5$ helyen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,$$

sort kapjuk, ami szintén divergens. Tehát a konvergenciaintervallum $(1,5)$.

Ha tagonként deriválunk, akkor a

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (x-3) - \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot (x-3)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (n+1)(x-3)^n$$

sort kapjuk. Ennek a sornak a konvergenciaintervallumának középpontja 3, a konvergenciasugara:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1)\right|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1/n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Tehát a $(1,5)$ intervallumon biztosan konvergens. Az $x = 1$ helyen a következő sort kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (n+1) \cdot (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{n+1}{2},$$

ez divergens, hiszen a tagjai nem tartanak 0-hoz. Valamint, az $x = 5$ helyen a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot (n+1) \cdot 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2},$$

sort kapjuk, ami szintén divergens. Tehát a konvergenciaintervallum $(1, 5)$.

Ezen nem lepődünk meg, ismert hogy a hatványsor és a tagonkénti deriválással kapott hatványsor konvergenciatartománya megegyezik.

3. Határozzuk meg az f által generált x_0 körüli Taylor-sort!

   (a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
   (b) $f(x) = xe^x$, $x_0 = 0$
   (c) $f(x) = x^3 - 2x + 4$, $x_0 = 0$
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$
   (e) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x_0 = 0$
   (f) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$

Megoldás. Az f függvény által generált x_0 körüli Taylor-sor alatt a következő hatványsort értjük:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

(a) Mivel $f^{(n)}(x) = e^x$, így $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, ezért a 0 körüli Taylor-sor (vagy más néven Maclaurin-sor):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(b) Használjuk az előző feladatot, valamint azt a tényt, hogy szorzat hatványsora a hatványsorok szorzata. Vegyük észre, hogy x eleve hatványsor alakban van. Tehát,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

(c) Mivel

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 2 = -2 \\ f''(0) &= 6 \cdot 0 = 0 \\ f'''(0) &= 6 \\ f^{(n)}(0) &= 0 \qquad n > 3, \end{aligned}$$

ezért a 0 körüli Taylor sor:

$$4 - 2x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{6}{6}x^3 = 4 - 2x + x^3.$$

(d) Mivel

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f'(1) &= -2\cdot 1^{-3} = -2 \\ f''(1) &= (-2)(-3)\cdot 1^{-4} = 6 \\ f'''(1) &= (-2)(-3)(-4)\cdot 1^{-5} = -24 \\ &\dots \end{aligned}$$

észrevehetjük, hogy $f^{(n)}(1) = (-1)^n(n+1)!$ Így az 1 körüli Taylor-sor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n.$$

(e) Mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{1-x}$ 0 körüli Taylor-sora $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, ezért $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ 0 körüli Taylor-sorát úgy kapjuk, ha a fentit tagonként lederiváljuk. Így a következőt kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

(f) Mivel tudjuk, hogy $\frac{1}{1+x}$ 0 körüli Taylor-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

ezért $\int \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)$ Taylor sorát úgy kapjuk, ha a fentit tagonként kiintegráljuk. Így $\ln(1+x)$ 0 körüli Taylor-sora:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

4. Határozzuk meg az $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ függvény binomiális sorának első négy tagját! **Megoldás.** A binomiális sor az $f(x) = (1+x)^\alpha$ függvénynek a 0 körüli Taylor-sora, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

ahol

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

A mi esetünkben $\alpha = -\frac{1}{2}$ és $(1-x) = (1+(-x))$, tehát az első négy tag:

$$(-x)^0 + \frac{-\frac{1}{2}}{1}(-x)^1 + \frac{-\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2}}{2}(-x)^2 + \frac{-\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2}\cdot -\frac{5}{2}}{3!}(-x)^3 = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16}$$

5. Határozzuk meg a $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ határértéket sorok segítségével!

Megoldás. A 3. feladatból tudjuk, hogy $\ln(1+x^2)$ 0 körüli Taylor-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots,$$

valamint ismert, hogy $\cos x$ 0 körüli Taylor-sora

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Az is ismert, hogy a tetszőleges pozitív x-re előállítja a két fenti függvényt a Taylor-sora. Így helyettesítsük őket be:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots}{1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots}{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \dots}{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Adjuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciaintervallumát!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n^2+3}}$

   Eredmények.

   (a) $[-1,1]$

   (b) $(2,4)$

2. Határozzuk meg az f által generált x_0 körüli Taylor-sort!

   (a) $f(x) = \mathrm{arctg} x$, $x_0 = 0$

   (b) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$ (segítség: használjuk $\cos x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ linearizációs formulát!)

   (c) $f(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x_0 = 0$

   Eredmények.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

   (b) $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n \cdot x^{2n-1}$

3. Határozzuk meg az $f(x) = (1+x^3)^{-1/2}$ függvény binomiális sorának első négy tagját!

   Eredmény.

$$1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$$