# Matematika A2a Vektorfüggvények – építőmérnököknek

## 1. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi (konvergens) végtelen sorok összegét!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}-3e^{n}}{e^{3n}}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

   **Megoldás.** A végtelen sor összege a véges kezdőösszegekből képzett sorozat határértéke, azaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

   Nevezetes végtelen sor a mértani sor, az összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad \text{amennyiben} \qquad |q| < 1.$$

   (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}+3e^{n}}{e^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} - 1$$
$$+\,3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} - 1\right) = \frac{1}{e-1} + \frac{3}{e^2-1}.$$

   (b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

   Vizsgáljuk meg a kezdőösszegeket! Azt vesszük észre, hogy úgynevezett teleszkopikus összeget kaptunk, azaz az összegnek csak az első és utolsó tagja marad meg, a többi kiejti egymást:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) \to \frac{1}{2} \qquad (N\to\infty),$$

   így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk a gyök-, illetve hányadoskritérium segítségével!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2018^n}{n^{2018}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$

**Megoldás.** Egy végtelen sor konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ létezik és véges. Egyébként divergens. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ létezik és véges, akkor a sor abszolút konvergens. Ha konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

A hányadoskritérium legkönnyebben használható formája:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens,}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens .}$$

A gyökkritérium legkönnyebben használható formája:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens,}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens .}$$

(a)

$$\sqrt[n]{\frac{n^4}{2^n}} = \frac{1}{2}(\sqrt[n]{n})^4 \to \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

ugyanis előző félévben tanultuk, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$. Így a sorozat a gyökkritérium alapján konvergens.

(b)

$$\frac{\frac{2018^{n+1}}{(n+1)^{2018}}}{\frac{2018^n}{n^{2018}}} = \frac{2018^{n+1}}{(n+1)^{2018}} \cdot \frac{n^{2018}}{2018^n} = 2018 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2018} \to 2018 \cdot 1^{2018} = 2018 > 1,$$

így a sorozat a hányadoskritérium alapján divergens.

(c)

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1,$$

tehát a sorozat a hányadoskritérium alapján konvergens.

(d)

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \to \frac{1}{e^3} < 1,$$

ugyanis előző félévben tanultuk, hogy ha $a_n \to 0$, $b_n \to \pm\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} \to e^c, \qquad \text{ahol} \qquad c = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n.$$

Jelenleg $a_n = -\frac{3}{n}$, $b_n = n$, így $a_n \cdot b_n \to -3$.

Tehát, a sorozat a gyökkritérium alapján konvergens.

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk összehasonlító kritériumok, vagy pedig az integrálkritérium segítségével!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}}$

   (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

   **Megoldás.** Összehasonlító kritériumok lényege nemnegatív tagú sor esetén: ha az összeg tagjait egy indextől kezdve felülről tudjuk becsülni egy konvergens sor megfelelő tagjaival, akkor a sorunk konvergens.

   Viszont ha az összeg tagjait egy indextől kezdve alulról tudjuk becsülni egy divergens sor megfelelő tagjaival, akkor a sorunk divergens.

   Integrálkritérium: legyen $f$ olyan függvény, amelyhez létezik $c \geq 1$, hogy $x \geq c$ értékekre $f$ pozitív, monoton csökkenő, folytonos és

   $$\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{konvergens.}$$

   Ekkor

   $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \text{konvergens.}$$

   Ha viszont létezik $d \geq 1$, hogy $x \geq d$ értékere $f$ pozitív, monoton csökkenő, folytonos és

   $$\int_d^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{divergens,}$$

   akkor

   $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \text{is divergens.}$$

   Ismert, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pedig konvergens.

   (a) Mivel

   $$\frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$$

   bármely $n \in \mathbb{N}$-re, ezért

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

   azaz a sorunk konvergens.

(b) Mivel
$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$$
bármely $n \in \mathbb{N}$-re, ezért
$$\infty = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1},$$
azaz a sorunk divergens.

(c) Mivel
$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{4n^2}} < \frac{1}{\sqrt{2n^2-n}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}}$$
bármely $n \in \mathbb{N}$-re, ezért
$$\infty = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{n}}$$
azaz a sorunk divergens.

(d) Mivel $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \geq 2$ folytonos, monoton csökkenő, pozitív, valamint
$$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_2^{c}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_2^{c}\frac{1}{x}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_2^c$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left(\frac{\ln^2 c}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}\right) = \infty,$$
ezért a végtelen sorunk divergens.

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok feltételesen, illetve abszolút konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}0.1^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

**Megoldás.** Egy végtelen sort Leibniz-sornak nevezünk, ha a tagjai váltakozó előjelűek és abszolútértékben monoton csökkenve tartanak a 0-ba. Ismert, hogy a Leibniz-sorok konvergensek.

(a) Ez egy Leibniz-sor, mivel a tagjai váltakozó előjelűek és $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$ monoton csökkenve. Tehát konvergens. Viszont csak feltételesen konvergens, mert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens.

(b) Ez egy Leibniz-sor, mivel a tagjai váltakozó előjelűek és $|(-1)^{n+1}0.1^n| = 0.1^n \to 0$ monoton csökkenve. Tehát konvergens. Valamint abszolút konvergens is, mert $\sum_{n=1}^{\infty}0.1^n = \frac{1}{1-0.1} - 1 = \frac{1}{9}$.

(c) Ez egy Leibniz-sor, mivel a tagjai váltakozó előjelűek és

$$\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right| = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$$

monoton csökkenve. Tehát konvergens. Viszont csak feltételesen konvergens, mert

$$\infty = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1+n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

**Gyakorlófeladatok.**

1. Határozzuk meg az alábbi (konvergens) végtelen sorok összegét!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{6^{n+1}}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

   **Eredmények.**

   (a) $\frac{7}{6}$
   (b) $\frac{1}{3}$

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk a gyök-, illetve hányadoskritérium segítségével!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   **Eredmények.**

   (a) konvergens
   (b) konvergens

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk összehasonlító kritériumok, vagy pedig az integrálkritérium segítségével!

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+4}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}+2}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$

   **Eredmények.**

   (a) konvergens
   (b) konvergens
   (c) divergens
   (d) konvergens

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok feltételesen, illetve abszolút konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5}{3n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+4}$

**Eredmények.**

(a) feltételesen konvergens

(b) abszolút konvergens