

MATEMATIKA A2A VEKTORFÜGGVÉNYEK – ÉPÍTŐMÉRNÖKÖKNEK

1. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi végtelen sorok összegét!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{6^{n+1}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

Megoldás. A végtelen sor összege a véges kezdőösszegekből képzett sorozat határértéke, azaz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n.$$

Nevezetes végtelen sor a mértani sor, az összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{amennyiben } |q| < 1.$$

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{6^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{6^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^{n+1}} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{6}} - 1\right) \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{5}{6}} - 1\right) = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right)$$

Vizsgáljuk meg a kezdőösszegeket! Azt vesszük észre, hogy úgynevezett teleszkopikus összeget kaptunk, azaz az összegnek csak az első és utolsó tagja marad meg, a többi kiejti egymást:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1}\right) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2N - 1} - \frac{1}{2N + 1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N + 1}\right) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (N \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk a gyök-, illetve hányadoskritérium segítségével!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2016^n}{n^{2016}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$

Megoldás. Egy végtelen sor konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ létezik és véges. Egyébként divergens. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ létezik és véges, akkor a sor abszolút konvergens. Ha konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor azt mondjuk hogy feltételesen konvergens.

A hányadoskritérium legkönnyebben használható formája:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

A gyökkritérium legkönnyebben használható formája:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

(a)

$$\sqrt[n]{\frac{n2^n}{3^n}} = \frac{2}{3} \sqrt[n]{n} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} < 1,$$

ugyanis előző félévben tanultuk, hogy $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$. Így a sorozat a gyökkritérium alapján konvergens.

(b)

$$\frac{\frac{2016^{n+1}}{(n+1)^{2016}}}{\frac{2016^n}{n^{2016}}} = \frac{2016^{n+1}}{(n+1)^{2016}} \cdot \frac{n^{2016}}{2016^n} = 2016 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2016} \rightarrow 2016 \cdot 1^{2016} = 2016 > 1,$$

így a sorozat a hányadoskritérium alapján divergens.

(c)

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{n! \cdot (n+1)} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 < 1,$$

tehát a sorozat a hányadoskritérium alapján konvergens.

(d)

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e^3} < 1,$$

ugyanis előző félévben tanultuk, hogy ha $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow \pm\infty$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{b_n} \rightarrow e^c, \quad \text{ahol} \quad c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n.$$

Jelenleg $a_n = -\frac{3}{n}$, $b_n = n$, így $a_n \cdot b_n \rightarrow -3$.

Tehát, a sorozat a gyökkritérium alapján konvergens.

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergenssek! Válaszunkat indokoljuk összehasonlító kritériumok, vagy pedig az integrálkritérium segítségével!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Megoldás. Összehasonlító kritériumok lényege nemnegatív tagú sor esetén: ha az összeg tagjait egy indextől kezdve felülről tudjuk becsülni egy konvergens sor megfelelő tagjaival, akkor a sorunk konvergens.

Viszont ha az összeg tagjait egy indextől kezdve alulról tudjuk becsülni egy divergens sor megfelelő tagjaival, akkor a sorunk divergens.

Integrálkritérium: legyen f olyan függvény, amelyhez létezik $c \geq 1$, hogy $x \geq c$ értékekre f pozitív, monoton csökkenő, folytonos és

$$\int_c^{\infty} f(x) dx \quad \text{konvergens.}$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{konvergens.}$$

Ha viszont létezik $d \geq 1$, hogy $x \geq d$ értékekre f pozitív, monoton csökkenő, folytonos és

$$\int_d^{\infty} f(x) dx \quad \text{divergens,}$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{is divergens.}$$

Ismert, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pedig konvergens.

(a) Mivel

$$\frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2}$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ -re, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

azaz a sorunk konvergens.

(b) Mivel

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ -re, ezért

$$\infty = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1},$$

azaz a sorunk divergens.

(c) Mivel

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{n^2}$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ -re, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

azaz a sorunk konvergens.

(d) Mivel $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$ folytonos, monoton csökkenő, pozitív, valamint

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_2^c \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_2^c \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} [\ln \ln x]_2^c \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} (\ln \ln c - \ln \ln 2) = \infty, \end{aligned}$$

ezért a végtelen sorunk divergens.

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok feltételesen, illetve abszolút konvergensek-e, vagy pedig divergens! Válaszunkat indokoljuk!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 0.1^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Megoldás. Egy végtelen sort Leibniz-sornak nevezünk, ha a tagjai váltakozó előjelűek és abszolútértékben monoton csökkenve tartanak a 0-ba. Ismert, hogy a Leibniz-sorok konvergensek.

(a) Ez egy Leibniz-sor, mivel a tagjai váltakozó előjelűek és $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ monoton csökkenve. Tehát konvergens. Viszont csak feltételesen konvergens, mert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens.

(b) Ez egy Leibniz-sor, mivel a tagjai váltakozó előjelűek és $|(-1)^{n+1} 0.1^n| = 0.1^n \rightarrow 0$ monoton csökkenve. Tehát konvergens. Valamint abszolút konvergens is, mert $\sum_{n=1}^{\infty} 0.1^n = \frac{1}{1-0.1} - 1 = \frac{1}{9}$.

(c) Ez egy Leibniz-sor, mivel a tagjai váltakozó előjelűek és

$$\left| (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right| = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

monoton csökkenve. Tehát konvergens. Viszont csak feltételesen konvergens, mert

$$\infty = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1+n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi végtelen sorok összegét!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n} - e^n}{e^{3n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$

Eredmények.

(a) $\frac{e}{e^2 - 1}$

(b) $\frac{1}{3}$

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk a gyök-, illetve hányadoskritérium segítségével!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Eredmények.

(a) konvergens

(b) konvergens

3. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk összehasonlító kritériumok, vagy pedig az integrálkritérium segítségével!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 4}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 4}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Eredmények.

(a) konvergens

(b) konvergens

(c) divergens

(d) konvergens

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok feltételesen, illetve abszolút konvergensek-e, vagy pedig divergensek! Válaszunkat indokoljuk!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{5+n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+4}$

Eredmények.

(a) feltételesen konvergens

(b) abszolút konvergens