Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

14. Gyakorlat megoldásai

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

   (a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

   Megoldás.

   (a)

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\arctan x]_0^c = \lim_{c\to\infty}(\arctan c - \arctan 0)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

   (b)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{c\to 0}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_c^1 = 2(3-0) = 6$$

   (c)

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\log(\log x)]_2^c = \infty - \log(\log 2) = \infty$$

   (d) Integráljunk parciálisan!

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left([-xe^{-x}]_0^c - \int_0^c -e^{-x}\right)$$
$$= \lim_{c\to\infty}(-ce^{-c} + 1 - e^{-c}) = \lim_{c\to\infty}(-ce^{-c}) + 1$$

   A határértéket L'Hospital szabállyal érdemes kiszámolni:

$$\lim_{c\to\infty}(-ce^{-c}) = \lim_{c\to\infty} -\frac{c}{e^c} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{e^c} = 0.$$

   Így

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

2. Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e! Használjuk az összehasonlító kritériumokat!

   (a) $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-e^{-x}}}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int_{\log 2}^\infty x^{-2}e^{-1/x}\,\mathrm{d}x$

   Megoldás.

   (a) Konvergens, mert
$$0 < \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6+1}}\,\mathrm{d}x < \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6}}\,\mathrm{d}x$$
   és a felső becslés egy konvergens improprius integrál:
$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^6}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2c^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

   (b) Divergens, mert
$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x < \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-e^{-x}}}\,\mathrm{d}x,$$
   és az alsó becslés egy végtelen értékű divergens improprius integrál:
$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_2^c \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[2\sqrt{x}]_2^c = \lim_{c\to\infty} 2\sqrt{c}-2\sqrt{2} = \infty.$$
   Így szükségszerűen
$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

   (c) Divergens, mert
$$\int_\pi^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,\mathrm{d}x,$$
   és az alsó becslés egy végtelen értékű improprius integrál:
$$\int_\pi^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_\pi^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\log x] = \lim_{c\to\infty}(\log c - \log \pi) = \infty.$$
   Így szükségszerűen
$$\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$$

   (d) Konvergens, mert
$$0 < \int_{\log 2}^\infty x^{-2}e^{-1/x}\,\mathrm{d}x < \int_{\log 2}^\infty x^{-2}\cdot 1\,\mathrm{d}x,$$
   és a felső becslés egy konvergens improprius integrál, mert
$$\int_{\log 2}^\infty x^{-2}\cdot 1\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_{\log 2}^c x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\log 2}^c = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{\log 2}-\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\log 2}$$

3. Mutassuk meg, hogy az

$$\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

impropius integrál divergens, így

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

is divergens, viszont

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Megoldás.

$$\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}[\log(x^2+1)]_0^c = \lim_{c\to\infty}\log(c^2+1) = \infty,$$

valamint hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^0 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\infty,$$

így az impropius integrál

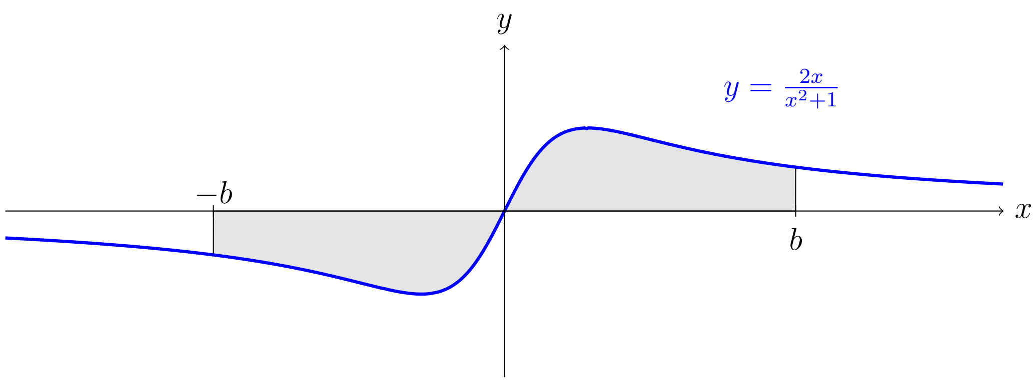
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^0 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\infty+\infty,$$

ami nem értelmes, tehát az impropius integrál divergens.

Ellenben,

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[\log(x^2+1)]_{-b}^{b} = \lim_{b\to\infty}(\log(b^2+1)-\log(b^2+1)) = 0.$$

De vegyük észre, hogy ez a számolás nem a mi impropius integrál definíciónkat használja! Viszont nem helytelen. Amit így kapunk, azt Cauchy-főértéknek nevezzük, és alkalmazásokban gyakran ez a jó definíció a 'végtelen integrál' értékére.



Gyakorlófeladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi impropius integrálokat!

(a) $\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int_{0}^{1} \log x \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x$

Eredmények.

(a) 6

(b) -1

(c) $\frac{\pi}{2}$

2. Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e!

(a) $\int_{4}^{\infty} \frac{4}{x^{3/2}-1} \, \mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^{1} \log x \, \mathrm{d}x$

(c) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+\log x}} \, \mathrm{d}x$

Eredmények.

(a) konvergens

(b) divergens (viszont a Cauchy-főértéke 0)

(c) konvergens

3.* Vegyük azt a végtelen forgástestet, amit az $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapunk. Lássuk be, hogy a felszínét leíró improprius integrál divergens, azaz a 'felszíne végtelen'! Lássuk be, hogy a térfogatát leíró improprius integrál viszont konvergens, és számítsuk is ki az értékét!

Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amibe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni. Töprengjünk el ezen! Nyilvánvalónak tűnik, hogy véges mennyiségű festékkel nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha teletöltjük a bödönt – amihez véges mennyiségű festék is elég – a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!

Tipp. Torricelli-tölcsér vagy Gábriel harsonája néven érdemes utánanézni.