

MATEMATIKA A1A ANALÍZIS –  
ÉPÍTŐMÉRNÖKÖKNEK

## 14. Gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

(a)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

(b)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{2/3}} dx$

(c)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx$

(d)  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

2. Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e! Használjuk a definíciót vagy az összehasonlító kritériumokat!

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6+1}} dx$

(b)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-e^{-x}}} dx$

(c)  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x} dx$

(d)  $\int_{\log 2}^{\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx$

3. Mutassuk meg, hogy az

$$\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

improprius integrál divergens, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

is divergens, viszont

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{2x}{x^2+1} dx = 0.$$

### Gyakorlófeladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

(a)  $\int_{-1}^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

(b)  $\int_0^1 \log x dx$

$$(c) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

2. Döntsük el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e!

$$(a) \int_4^\infty \frac{4}{x^{3/2}-1} dx$$

$$(b) \int_{-1}^1 \log x dx$$

$$(c) \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+\log x}} dx$$

3\* Vegyük azt a végtelen forgástestet, amit az  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \geq 1$  görbe  $x$ -tengely körüli megforgatásával kapunk. Lássuk be, hogy a felszínét leíró improprius integrál divergens, azaz a 'felszíne végtelen'! Lássuk be, hogy a térfogatát leíró improprius integrál viszont konvergens, és számítsuk is ki az értékét!

Ezt a forgástestet sokszor úgy emlegetik, mint egy olyan festékesbödönt, amibe nem fér bele annyi festék, amennyivel be lehetne festeni a belsejét. Töprengjünk el ezen! Nyilvánvalónak tűnik, hogy véges mennyiségű festékkal nem tudjuk befesteni a végtelen területű felszínt. De ha teletöltjük a bödönt – amihez véges mennyiségű festék is elég – a festék megfesti a felszínt belülről! Oldjuk fel ezt az ellentmondást!