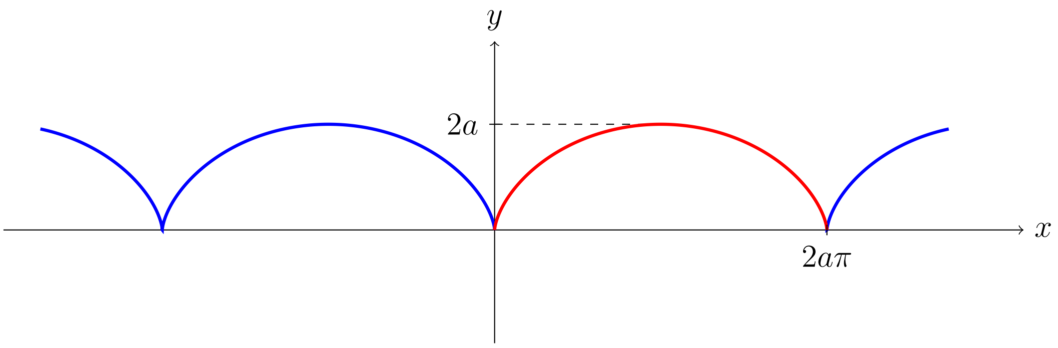
Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

13. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ paraméterezésű görbe alatti területet!

   Megoldás. Ez az úgynevezett ciklois-görbe egy szegmense (egy egyenesen gördülő a sugarú kör egy rögzített pontja rajzol le ilyen görbét.)



$$T = \int_0^{2\pi} y(t)\ \mathrm{d}x(t) = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\ \mathrm{d}t$$
$$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\ \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\ \mathrm{d}t$$
$$= a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

2. Határozzuk meg az alábbi görbék ívhosszát!

   (a) $y = x^2$, $0 \le x \le 1$

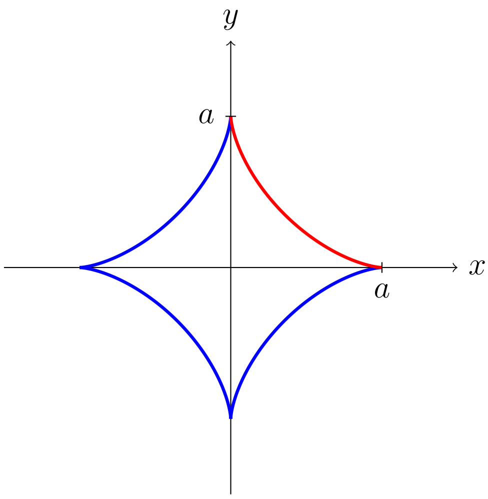
   (b) $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

   Megoldás.

(a)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{arsinh} 2} \frac{1}{2}\sqrt{1+(\sinh t)^2}\cosh t\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\mathrm{arsinh} 2} \frac{1}{2}\sqrt{\cosh^2 t}\cosh t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{arsinh} 2} \frac{1}{2}\cosh^2 t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{arsinh} 2} \frac{\cosh 2t+1}{4}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\sinh 2t}{2}+t\right]_0^{\mathrm{arsinh} 2} = \frac{1}{4}\left[\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}+t\right]_0^{\mathrm{arsinh} 2} = \frac{2\sqrt{5}+\mathrm{arsinh} 2}{4}
\end{aligned}
$$

(b) Ez az asztroid nevű görbének egy szegmense (negyede). Az asztroid-görbét egy a sugarú kör belső ívén gördülő $\frac{a}{4}$ sugarú kör egy pontja írja le.



$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a\cdot 3\cos^2 t\cdot -\sin t)^2+(a\cdot 3\sin^2 t\cos t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}\ \mathrm{d}t = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\ \mathrm{d}t \\
&= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\ \mathrm{d}t = 3a\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}
\end{aligned}
$$

3. Határozzuk meg az alábbi görbék x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest felszínét!

(a) $y=\cosh x$, $0\le x\le 3$

(b) $x(t)=a\cos^3 t$, $y(t)=a\sin^3 t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

Megoldás.

(a)

$$
\begin{aligned}
A &= 2\pi\int_0^3 y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^3 \cosh x\sqrt{1+(\sinh x)^2}\ \mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^3 \cosh x\sqrt{(\cosh x)^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^3 \cosh^2 x\ \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^3 \frac{1+\cosh 2x}{2}\ \mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left[\frac{x}{2}+\frac{\sinh 2x}{4}\right]_0^3 = \pi\left(\frac{6+\sinh 6}{2}\right)
\end{aligned}
$$

(b) Használjuk az előző feladat (b) részében kapott eredményt $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$-re!

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\ \mathrm{d}t = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\cos t \sin t\ \mathrm{d}t \\ &= 6a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\ \mathrm{d}t = 6a^2\pi \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6a^2\pi}{5} \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg az alábbi görbék x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát!

(a) $y = \cosh x$, $0 \le x \le 3$

(b) $x(t) = a\cosh t$, $y(t) = b\sinh t$, $0 \le t \le 1$

Megoldás.

(a)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 y^2(x)\ \mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \cosh^2(x)\ \mathrm{d}x = \pi \int_0^3 \frac{1+\cosh 2x}{2}\ \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{\sinh 2x}{4}\right]_0^3 \\ &= \pi\left(\frac{6+\sinh 6}{4}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2(t)x'(t)\ \mathrm{d}t = \pi \int_0^1 b^2\sinh^2 t \cdot a\sinh t\ \mathrm{d}t = ab^2\pi \int_0^1 (\cosh^2 t - 1)\sinh t\ \mathrm{d}t \\ &= ab^2\pi \int_0^1 \cosh^2 t \sinh t - \sinh t\ \mathrm{d}t = ab^2\pi \left[\frac{\cosh^3 t}{3} - \cosh t\right]_0^1 \\ &= ab^2\pi \left(\frac{(\cosh 1)^3+2}{3} - \cosh 1\right) \end{aligned}$$

5. Határozzuk meg az $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $0 \le x \le r$ negyedkörlemez súlypontját!

Megoldás. A nyomatékok:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^r y^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^r r^2 - x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{r^3}{3},$$

$$M_y = \int_0^r x\cdot y(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\frac{(r^2-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^r = \frac{r^3}{3}.$$

A negyedkör területe $T = \frac{r^2\pi}{4}$. Így a súlypont (x_s, y_s) koordinátái:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{M_y}{T} = \frac{r^3/3}{r^2\pi/4} = \frac{r^3}{3}\cdot\frac{4}{r^2\pi} = \frac{4r}{3\pi}, \\ y_s &= \frac{M_x}{T} = \frac{r^3/3}{r^2\pi/4} = \frac{r^3}{3}\cdot\frac{4}{r^2\pi} = \frac{4r}{3\pi}. \end{aligned}$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi paraméterezett görbék alatti területet!

   (a) $x(t) = 3\cosh t$, $y(t) = 2\sinh t$, $2 \le t \le 3$

   (b) $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

   Eredmények.

   (a)
   $$3\left(\frac{\sinh 6 - \sinh 4}{2} - 1\right)$$

   (b)
   $$\frac{3a^2\pi}{32}$$

2. Határozzuk meg az alábbi görbék ívhosszát!

   (a) $y = \cosh x$, $0 \le x \le 3$

   (b) $y = \log(x^2 - 1)$, $2 \le x \le 4$

   (c) $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

   Eredmények.

   (a) $\sinh 3$

   (b) $2 + \log\left(\frac{9}{5}\right)$

   (c) $8a$

3. Határozzuk meg az alábbi görbék x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest felszínét és térfogatát!

   (a) $y = 2\sqrt{x}$, $2 \le x \le 4$

   (b) $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

   Eredmények.

   (a) $A = \frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$, $V = 24\pi$

   (b) $A = 2\pi a^2$, $V = \frac{2a^3\pi}{3}$