Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

12. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi integrálokat az integrandus parciális törtekre bontása segítségével!

   (a) $\int \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int \frac{5x^2+1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

   Megoldás.

   (a)
$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}\,\mathrm{d}x$$

   Ha $\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$, akkor

$$A(x+3) + B(x-2) = 1,$$
$$(A+B)x + (3A-2B) = 1.$$

   Ez csak úgy teljesülhet, ha $A+B=0$ és $3A-2B=1$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $A=\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{5}$. Tehát:

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(\log|x-2| - \log|x+3|) + c$$
$$= \frac{1}{5}\log\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + c$$

   (b)

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x+4}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = 2\log|x^2+2x+2|$$
$$+ \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\log|x^2+2x+2| + \arctan(x+1) + c$$

(c)

$$\int \frac{5x^2+1}{x^2+x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{5x}{x+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x(x+1)}\ \mathrm{d}x = 5\int \frac{x+1-1}{x+1}\ \mathrm{d}x$$
$$+\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\ \mathrm{d}x = 5\int 1 - \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\ \mathrm{d}x = 5(x - \log|x+1|)$$
$$+\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\ \mathrm{d}x$$

Ha $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$, akkor

$$A(x+1) + Bx = 1,$$
$$(A+B)x + A = 1.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $A + B = 0$ és $A = 1$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $A = 1$, $B = -1$. Tehát:

$$\int \frac{5x^2+1}{x^2+x}\ \mathrm{d}x = 5(x - \log|x+1|) + \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x = 5(x - \log|x+1|)$$
$$+\log|x| - \log|x+1| + c = 5x - 6\log|x+1| + \log|x| + c$$

2. Határozzuk meg az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítés segítségével!
   (a) $\int x\sin x^2\ \mathrm{d}x$
   (b) $\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$
   (c) $\int \sqrt{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x$

Megoldás.

(a) Alkalmazzuk a $t = x^2$ helyettesítést. Így $x = \sqrt{t}$ és $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$, és

$$\int x\sin x^2\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{t}\sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sin t\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c.$$

(b) Alkalmazzuk az $x = \sin t$ helyettesítést (ekkor $t = \arcsin x$). Így $\mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$, és

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t =$$
$$\int \frac{1+\cos 2t}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + c = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + c$$
$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

(c)

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+1)^2+1}\ \mathrm{d}x$$

Alkalmazzuk az $x+1=\sinh t$ helyettesítést (ekkor arsinh $(x+1)=t$). Így $\mathrm{d}x = \cosh t\ \mathrm{d}t$ és

$$\int \sqrt{(x+1)^2+1}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{\sinh^2 t+1}\cosh t\ \mathrm{d}t = \int \sqrt{\cosh^2 t}\cosh t\ \mathrm{d}t$$
$$= \int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1+\cosh 2t}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sinh 2t + c = \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sinh t\cosh t + c$$
$$= \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sinh t\sqrt{\sinh^2 t+1} + c = \frac{\operatorname{arsinh}(x+1)}{2} + \frac{(x+1)\sqrt{(x+1)^2+1}}{2} + c$$

3. Határozzuk meg az alábbi görbék alatti területet!

(a) $y=\sqrt{e^x-1}$, $x\in[0,\log 2]$

(b) $y=\frac{e^x}{e^{2x}-1}$, $x\in[\log 2,\log 3]$

Megoldás.

(a) A területet a következő integrál fogja adni:

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\ \mathrm{d}x.$$

Alkalmazzuk a $t=\sqrt{e^x-1}$ helyettesítést. Így $x=\log(t^2+1)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$, valamint mivel x a 0 és $\log 2$ értékek között változott, így $t=\sqrt{e^x-1}$ a $\sqrt{e^0-1}=0$ és a $\sqrt{e^{\log 2}-1}=1$ értékek között fog változni. Tehát:

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\cdot t\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 1-\frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$$
$$= 2[t-\arctan t]_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}$$

(b) A területet a következő határozott integrál fogja adni:

$$T=\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\ \mathrm{d}x.$$

Alkalmazzuk a $t=e^x$ helyettesítést. Így $x=\log t$ (tehát mivel x a $\log 2$ és $\log 3$ értékek között változott, $t=e^x$ az $e^{\log 2}=2$ és $e^{\log 3}=3$ között fog változni) továbbá $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$, így

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\ \mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{t}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{1}{(t+1)(t-1)}\ \mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}\ \mathrm{d}t.$$

Ha $\frac{1}{(t+1)(t-1)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t-1}$, akkor

$$A(t-1)+B(t+1)=1,$$
$$(A+B)t+(B-A)=1.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $A+B=0$ és $B-A=1$, azaz $B=\frac{1}{2}$ és $A=-\frac{1}{2}$. Így

$$\frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\log(t-1)-\log(t+1)\right]_2^3 = \log\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi integrálokat!

   (a) $\int \frac{1}{x^4+5x^2+4}\ \mathrm{d}x$

   (b) $\int e^{2x} \cos e^{2x}\ \mathrm{d}x$

   (c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\ \mathrm{d}x$

   (d) $\int \frac{x+2}{x^3-x}\ \mathrm{d}x$

   (e) $\int x^3 \cos x^2\ \mathrm{d}x$

   (f) $\int \frac{2x+3}{2x^2+x-3}\ \mathrm{d}x$

   Eredmények.

   (a)
   $$\frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

   (b)
   $$\frac{1}{2}\sin(e^{2x}) + c$$

   (c)
   $$\frac{1}{3}\sqrt{x^2-1}(x^2+2) + c$$

   (d)
   $$-2\log|x| + \log|x^2-1| + \frac{1}{2}(\log|x-1| - \log|x+1|) + c$$

   (e)
   $$\frac{1}{2}(x^2\sin x^2 + \cos x^2) + c$$

   (f)
   $$\log|\sqrt{2}(x-1)| + c$$

2. Határozzuk meg az alábbi görbék alatti területet!

   (a) $y = \sqrt{2x-x^2}$, $x \in [0,2]$

   (b) $y = \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in [-1,1]$

   Eredmények.

   (a) $\frac{\pi}{2}$

   (b) $2\mathrm{arsinh}1 - \sqrt{2} \approx 0.34853$