Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

11. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi integrálokat a parciális integrálás módszerével!

   (a) $\int x \sin 2x \; \mathrm{d}x$

   (b) $\int e^{-x} \sin x \; \mathrm{d}x$

   (c) $\int \log 5x \; \mathrm{d}x$

   Megoldás. A parciális integrálás szabálya:

$$\int f'(x)g(x) \; \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \; \mathrm{d}x.$$

   (a) Legyen $g(x) = x$, így $g'(x) = 1$. Valamint legyen $f'(x) = \sin 2x$, így $f(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$.

$$\int x \sin 2x \; \mathrm{d}x = x \cdot \frac{-\cos 2x}{2} - \int \frac{-\cos 2x}{2} \; \mathrm{d}x = -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

   (b) Legyen $g(x) = e^{-x}$, így $g'(x) = -e^{-x}$. Valamint legyen $f'(x) = \sin x$, így $f(x) = -\cos x$.

$$\begin{aligned}
\int e^{-x} \sin x \; \mathrm{d}x &= e^{-x} \cdot (-\cos x) - \int -e^{-x} \cdot (-\cos x) \; \mathrm{d}x \\
&= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x - \int -e^{-x} \sin x \; \mathrm{d}x \right) \\
&= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x \; \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

   A második parciális integrálásánál $g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x}$, valamint $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$ leosztást alkalmaztunk. Átrendezve:

$$\begin{aligned}
2 \int e^{-x} \sin x \; \mathrm{d}x &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x, \\
\int e^{-x} \sin x \; \mathrm{d}x &= -\frac{e^{-x}(\cos x + \sin x)}{2} + c.
\end{aligned}$$

   (c) Legyen $g(x) = \log 5x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$, valamint $f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$.

$$\int \log 5x \; \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log 5x \; \mathrm{d}x = x \log 5x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x = x \log 5x - x + c$$

2. Határozzuk meg az alábbi integrálokat a linearizációs formulák segítségével!

   (a) $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$
   (b) $\int \sin 3x \sin 7x \, \mathrm{d}x$
   (c) $\int \cos^3 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

   Megoldás.

   (a) Mivel $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

   ezért

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

   (b) Mivel

$$\begin{aligned} \cos(7x+3x) &= \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x, \\ \cos(7x-3x) &= \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x, \end{aligned}$$

   ezért $\sin 3x \sin 7x = \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2}$. Így

$$\int \sin 3x \sin 7x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 10x}{20} + c.$$

   (c)

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \cos x \sin^2 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \cos x \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\left(\sin x - \int \cos x \cos 4x \, \mathrm{d}x\right)$$

   Mivel

$$\begin{aligned} \cos(4x+x) &= \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x, \\ \cos(4x-x) &= \cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x, \end{aligned}$$

   ezért $\cos x \cos 4x = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{2}$. Így

$$\frac{1}{8}\left(\sin x - \int \cos x \cos 4x \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{8}\left(\sin x - \int \frac{\cos 5x + \cos 3x}{2} \, \mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{\sin x}{8} - \frac{\sin 5x}{80} - \frac{\sin 3x}{48} + c$$

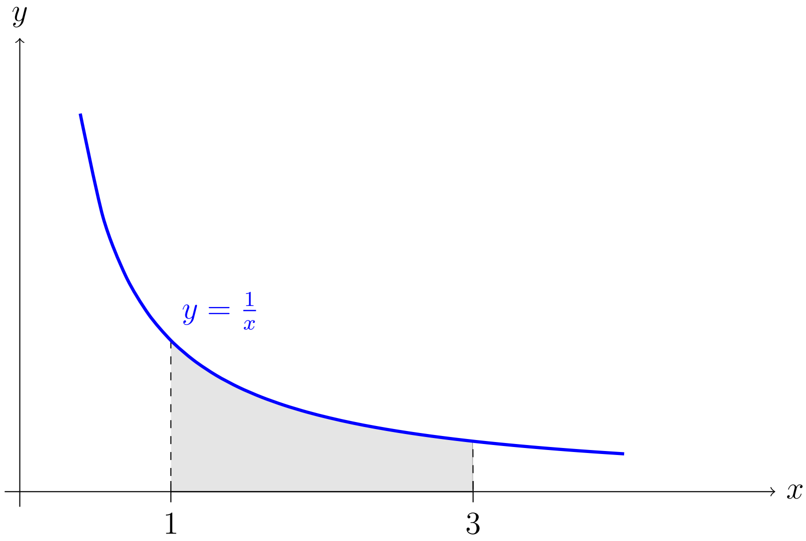
3. Határozzuk meg az alábbi tartományok területét!

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 3$ függvénygörbe és az x tengely által közrezárt tartomány
   (b) $y = x^2 + 1$ és $y = 2^x$ görbék által közrezárt tartomány
   (c) $y = \sin x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ függvénygörbe és az x tengely által közrezárt tartomány

Megoldás.

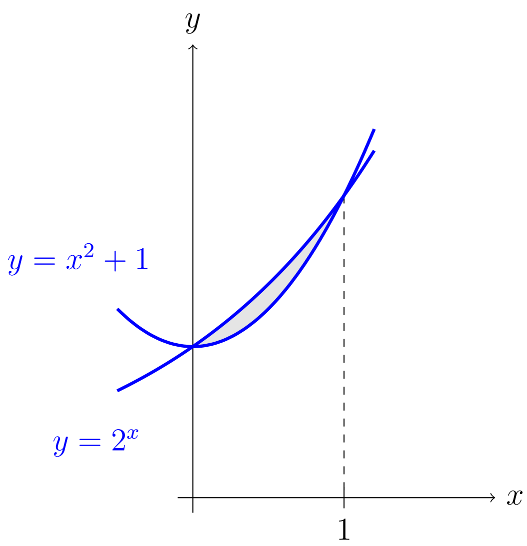
(a)

$$T = \int_1^3 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = [\log x]_1^3 = \log 3 - \log 1 = \log 3$$



(b) Mivel $x^2 + 1 = 2^x$ pontosan akkor, ha $x = 0$ vagy $x = 1$ ezért ezen a két helyen metszi egymást a két görbe. A közrezárt terület:

$$\int_0^1 2^x\ \mathrm{d}x - \int_0^1 x^2 + 1\ \mathrm{d}x = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2} - \frac{4}{3}.$$

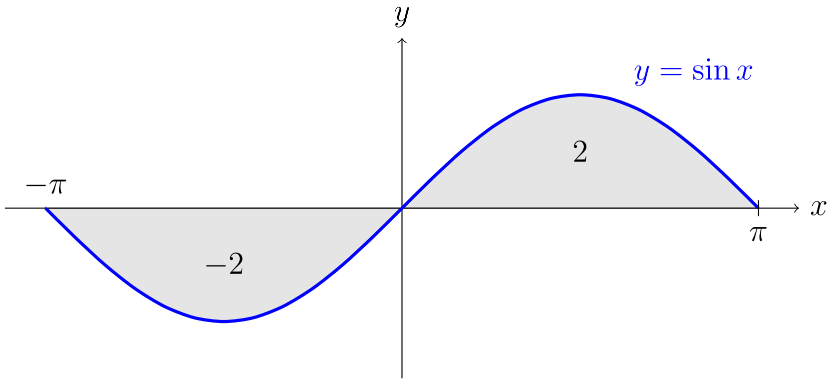


(c) Figyeljük meg, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\ \mathrm{d}x = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0,$$

és ez nyilván nem adja meg a keresett területet! Ez azért van, mert az integrál az x tengely feletti tartományok területét pozitív, az x tengely alatti tartományok területét negatív előjellel adja meg. Tehát megkaphatjuk például úgy a helyes területet, ha a szinusz abszolútértékét integráljuk (ezzel az x tengely alatti területet 'felfordítottuk').

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 2(1+1) = 4.$$



4. Válasszuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az $y = ax\log x$, $1 \leq x \leq e$ görbe alatti terület 10 legyen!

Megoldás. A görbe alatti terület:

$$\int_1^e ax\log x \, \mathrm{d}x = a\left(\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = a\left(\frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e\right) = a\left(\frac{e^2+1}{4}\right).$$

Ez pontosan akkor 10, ha

$$10 = a\left(\frac{e^2+1}{4}\right),$$
$$a = \frac{40}{e^2+1}.$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi integrálokat!

   (a) $\int \frac{x}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int \cos 3x \cos 5x \,\mathrm{d}x$

   (c) $\int e^{3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$

   (d*) $\int \sin^2 x \cos^4 3x\,\mathrm{d}x$

   (e) $\int \arctan 2x\,\mathrm{d}x$

   (f) $\int x^2 \log x\,\mathrm{d}x$

Eredmények.

(a)

$$-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)+c$$

(b)

$$\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

(c)

$$\frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x+2\sin 2x)+c$$

(d*)

$$\frac{3x}{16}-\frac{3\sin 2x}{32}-\frac{\sin 4x}{32}+\frac{\sin 6x}{24}-\frac{\sin 8x}{64}-\frac{\sin 10x}{320}+\frac{\sin 12x}{192}-\frac{\sin 14x}{448}+c$$

(e)

$$x\arctan 2x-\frac{1}{4}\log(4x^2+1)+c$$

(f)

$$\frac{x^3}{3}\left(\log x-\frac{1}{3}\right)+c$$

2. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{\sqrt{2+2x+x^2}}$, $0\le x\le 1$ görbe alatti területet!

   Eredmény. $T=$arsinh $2-$arsinh $1\approx 0.5623$

3. Határozzuk meg az $y=x^2$ és az $y=2-x^2$ görbék által közrezárt területet!

   Eredmény. $T=\frac{8}{3}$