Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

10. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi integrálokat!

   (a) $\int \sqrt[3]{x^2}\ \mathrm{d}x$

   (b) $\int \cos x + \frac{x^2+1}{2x}\ \mathrm{d}x$

   (c) $\int \tan^2 x\ \mathrm{d}x$

   (d) $\int \frac{4e^{3x}-e^{-x}}{e^{2x}} - \frac{5}{2+2x^2}\ \mathrm{d}x$

   Megoldás. Az f függvény határozatlan integrálja a primitívfüggvényeinek a halmaza. Ezek olyan függvények, amelyek deriváltja éppen f. Csupán additív konstansban különböznek egymástól. Tehát:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{ahol } F' = f.$$

   (a)

$$\int \sqrt[3]{x^2}\ \mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + c$$

   (b)

$$\int \cos x + \frac{x^2+1}{2x}\ \mathrm{d}x = \int \cos x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \sin x + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\log|x| + c$$

   (c)

$$\int \tan^2 x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\ \mathrm{d}x = \tan x - x + c$$

   (d)

$$\int 4e^x - \frac{5}{2+2x^2}\ \mathrm{d}x = \int 4e^x\ \mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 4e^x - \frac{5}{2}\arctan x + c$$

2. Határozzuk meg az alábbi integrálokat az $\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + c$, $F' = f$ szabály segítségével!

   (a) $\int (2x-3)^{10}\ \mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{1}{\sin^2(7x-\pi)}\ \mathrm{d}x$

Megoldás.

(a)

$$\int (2x-3)^{10}\ \mathrm{d}x = \frac{(2x-3)^{11}}{11\cdot 2} + c = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + c$$

(b)

$$\int \frac{1}{\sin^2(7x-\pi)}\ \mathrm{d}x = -\frac{\cot(7x-\pi)}{7} + c$$

3. Határozzuk meg az alábbi integrálokat az $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \log|f(x)| + c$ szabály segítségével!

(a) $\int \frac{x^2+2}{2x^3+12x-9}\ \mathrm{d}x$

(b) $\int \cot x\ \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{1}{x\log x}\ \mathrm{d}x$

Megoldás.

(a)

$$\int \frac{x^2+2}{2x^3+12x-9}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{6x^2+12}{2x^3+12x-9}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\log|2x^3+12x-9| + c$$

(b)

$$\int \cot x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\ \mathrm{d}x = \log|\sin x| + c$$

(c)

$$\int \frac{1}{x\log x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\ \mathrm{d}x = \log|\log x| + c$$

4. Határozzuk meg az alábbi integrálokat az $\int f^\alpha(x)f'(x)\ \mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$ szabály segítségével!

(a) $\int x^2(2x^3-4)\ \mathrm{d}x$

(b) $\int \sin x\cos x\ \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$

Megoldás.

(a)

$$\int x^2(2x^3-4)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3-4)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3-4)^2}{2} + c = \frac{(2x^3-4)^2}{12} + c$$

(b)

$$\int \sin x\cos x\ \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

(c)

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\tan^{\frac{1}{2}} x\ \mathrm{d}x = \frac{\tan^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{\tan^3 x}}{3} + c$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi integrálokat!

   (a) $\int x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 5\sin x - 2^x \; \mathrm{d}x$

   (b) $\int \frac{\sqrt[5]{x\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} \; \mathrm{d}x$

   (c) $\int \sin^4 x \sin 2x \; \mathrm{d}x$

   (d) $\int \tan 3x \; \mathrm{d}x$

   (e) $\int \frac{1}{x+a} \; \mathrm{d}x,\ a \in \mathbb{R}$

   (f) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} \; \mathrm{d}x$

   (g) $\int \cos(7x+\pi) \; \mathrm{d}x$

   Eredmények.

   (a)
$$\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2\sqrt[2]{x^3}} - 5\cos x - \frac{2^x}{\log 2} + c$$

   (b)
$$\frac{20\sqrt[20]{x^{21}}}{21} + c$$

   (c)
$$\frac{\sin^6 x}{3} + c$$

   (d)
$$-\frac{1}{3}\log|\cos 3x| + c$$

   (e)
$$\log|x+a| + c$$

   (f)
$$-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(x-1)^2} + c$$

   (g)
$$\frac{\sin(7x+\pi)}{7} + c$$

2*. Mutassuk meg, hol a hiba a következő gondolatmenetben!

   Legyen $x > 0$. Mivel
$$\log 2x = \int \frac{2}{2x} \; \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x = \log x,$$
   és a logaritmusfüggvény kölcsönösen egyértelmű, $2x = x$ kell hogy teljesüljön, tehát bármely pozitív szám megegyezik a kétszeresével!