Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

9. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg az alábbi függvények a körüli n-ed rendű Taylor-polinomját!

   (a) $f(x) = \cos 3x$, $a = \pi$, $n = 4$

   (b) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $n = 5$

   (c) $f(x) = x^3 - 4x + 5$, $a = 0$, $n = 3$

   Megoldás.

   (a)

$$
\begin{aligned}
f(x) = \cos 3x &\Rightarrow f(\pi) = -1 \\
f'(x) = -3\sin 3x &\Rightarrow f'(\pi) = 0 \\
f''(x) = -9\cos 3x &\Rightarrow f''(\pi) = 9 \\
f'''(x) = 27\sin 3x &\Rightarrow f'''(\pi) = 0 \\
f^{(4)}(x) = 81\cos 3x &\Rightarrow f^{(4)}(\pi) = -81
\end{aligned}
$$

   Mivel

$$T_{f,4}(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4,$$

   behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T_{f,4}(x) = -1 + \frac{9}{2}(x-\pi)^2 - \frac{81}{24}(x-\pi)^4.$$

   (b) Mivel $f^{(n)}(x) = e^x$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, ezért $f^{(n)}(0) = 1$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re. Mivel

$$T_{f,5}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5,$$

   behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T_{f,5}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x + 5 \Rightarrow f(0) = 5 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4 \Rightarrow f'(0) = -4 \\ f''(x) &= 6x \Rightarrow f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= 6 \Rightarrow f'''(0) = 6 \end{aligned}$$

Mivel

$$T_{f,3}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3,$$

behelyettesítve kapjuk, hogy

$$T_{f,3}(x) = 5 - 4x + 0 \cdot x^2 + \frac{6}{3!}x^3 = 5 - 4x + x^3.$$

2. Jelölje az $f(x) = \sin x$ ötödrendű $a = 0$ körüli Taylor-polinomját $T_{f,5}(x)$. Adjunk becslést arra, hogy $\sin(0.1)$ és $T_{f,5}(0.1)$ között legfeljebb mekkora különbség lehet!

   Megoldás. A hibát felírhatjuk a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$f(0.1) - T_{f,5}(0.1) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(0.1)^6,$$

   ahol $\xi \in [0, 0.1]$. Becsüljük meg, ez legfeljebb mekkora lehet! Mivel $f^{(6)}(x) = -\sin x$,

$$\left| -\frac{\sin\xi}{6!}(0.1)^6 \right| = \frac{(0.1)^6}{720} |\sin\xi| \le \frac{(0.1)^6}{720}.$$

3. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora a hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

   Megoldás. A közelítő formula éppen az $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvény 0 körüli másodrendű Taylor-polinomja, hiszen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Tehát

$$T_{f,2}(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4 \cdot 2!} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

   A hibát felírhatjuk a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$f(x) - T_{f,2}(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3,$$

   ahol $\xi \in [0, x]$ pozitív x esetén, $\xi \in [x, 0]$ negatív x esetén. Becsüljük meg, ez legfeljebb mekkora lehet! Mivel $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$,

$$\left| \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5} \cdot 3!} \cdot x^3 \right| \le \frac{1}{16\sqrt{(1-0.5)^5}} \cdot 0.5^3 \approx 0.0441$$

4. Adjunk 10^{-4} pontosságú becslést e értékére az $f(x) = e^x$ alkalmas Taylor-polinomja segítségével!

Megoldás. Ha $f(x) = e^x$, akkor $f(1) = e$. Az első feladatra adott megoldásból látszik, hogy $f(x) = e^x$ n-ed rendű Taylor polinomja a 0 körül

$$T_{f,n}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

a Lagrange-féle maradéktag pedig

$$L_{f,n}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \xi \in [0, x]$$

Válasszuk meg n-et úgy, hogy $|f(1) - T_{f,n}(1)| = |L_{f,n}(1)| < 10^{-4}$ teljesüljön.

$$|L_{f,n}(1)| = \left| \frac{e^\xi}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| \leq \frac{4}{(n+1)!},$$

felhasználva, hogy $e \leq 4$ (ez elemi úton bizonyítható, de most nem vezetjük le, hanem ismert tényként kezeljük). Tehát a legkisebb olyan n-et keressük, amelyre

$$\frac{4}{(n+1)!} < 10^{-4}.$$

Némi próbálkozás után azt látjuk, hogy $n = 7$ már jó lesz. Így a 7-ed rendű Taylor polinom értéke az 1-ben 10^{-4} pontosságú közelítés lesz.

$$T_{f,7}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{7!} \approx 2.7182539\ldots$$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények a körüli n-ed rendű Taylor-polinomját!

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 1$, $n = 3$

   (b) $f(x) = \log(1 + x)$, $a = 0$, $n = 3$

   Eredmények.

   (a)
   $$T_{f,3}(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3$$

   (b)
   $$T_{f,3}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

2. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora a hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

   $$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

   Eredmény. $\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| \leq \frac{1}{3840}$, amennyiben $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

3. Adjunk 10^{-4} pontosságú becslést $\sqrt{0.9}$ értékére az $f(x) = \sqrt{x}$ alkalmas Taylor-polinomja segítségével!

   Eredmény. $T_{f,2}$ 1 körüli Taylor-polinom alkalmazásával:

   $$\sqrt{0.9} \approx 0.94875$$