Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

8. Gyakorlat megoldásai

1. Az implicit deriválás módszerével határozzuk meg a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ deriváltat!

   (a) $x^2 + y^2 = 1$

   (b) $x = \tan y$

   Megoldás. Tekintsünk y-ra mint x függvényére, majd deriváljuk le az egyenletet.

   (a)

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2(x) &= 1 \qquad \backslash' \\
2x + 2y(x)y'(x) &= 0 \\
y'(x) &= -\frac{x}{y(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
x &= \tan y(x) \qquad \backslash' \\
1 &= \frac{y'(x)}{\cos^2 y(x)} \\
y'(x) &= \cos^2 y(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos^2 y
\end{aligned}
$$

2. Írjuk fel az $x^2 + xy - y^2 = 1$ egyenletű görbéhez a $P(2,3)$ pontra illeszkedő érintő, illetve normális egyenes egyenletét!

   Megoldás. Mivel implicit módon van megadva a görbe, az érintő meredekségét az implicit derivált segítségével kaphatjuk meg.

$$
\begin{aligned}
x^2 + xy(x) - y^2(x) &= 1 \qquad \backslash' \\
2x + y(x) + xy'(x) - 2y(x)y'(x) &= 0 \\
y'(x) &= -\frac{2x + y(x)}{x - 2y(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x + y}{x - 2y}
\end{aligned}
$$

   Ez kiértékelve a $P(2,3)$ pontban:

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2,3) = -\frac{2 \cdot 2 + 3}{2 - 2 \cdot 3} = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}
$$

Tehát az érintő egyenlete:

$$y - 3 = \frac{7}{4}(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 4y = 2$$

Utóbbi alakból látszik, hogy az egyenes egy irányvektora $(7, -4)$. A normális egyenes egy erre merőleges egyenes lesz, tehát egy irányvektora: $(4, 7)$. Így az egyenlete

$$4x + 7y = 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 29$$

3. Adjuk meg az $x = 5\cos t$, $y = 4\sin t$ paraméterezésű ellipszis $t = \frac{\pi}{4}$ paraméterű pontjára illeszkedő érintőegyenes egyenletét!

Megoldás. Mivel x és y a t változó függvénye, használjuk az $x(t)$ és $y(t)$ jelölést. Számoljuk ki az implicit deriváltat! A láncszabály alapján

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

Tehát

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4\cos t}{-5\sin t}.$$

Ez kiértékelve a $t = \frac{\pi}{4}$ pontban:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2}}{5\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{4}{5}$$

Tehát ez lesz az érintőegyenes meredeksége. Még szükségünk van az érintési pont (x, y) koordinátáira. Mivel $x = 5\cos t$, ezért az érintési pont első koordinátája $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, és mivel $y = 4\sin t$, ezért az érintési pont második koordinátája $2\sqrt{2}$. Tehát az érintő egyenlete:

$$y - 2\sqrt{2} = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 5y + 4x = 20\sqrt{2}$$

4. Mennyi a maximális területe annak a derékszögű háromszögnek, amelynek az átfogója 5 hosszú?

Megoldás. Ha a derékszögű háromszög két befogójának hossza a és b, akkor a területe

$$T = \frac{ab}{2}$$

Azt tudjuk, hogy az átfogó 5 hosszú, tehát $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, azaz $a = \sqrt{25 - b^2}$, így

$$T(b) = \frac{b\sqrt{25 - b^2}}{2}, \quad 0 < b < 5.$$

Ennek a függvénynek ott lesz lokális maximuma, ahol a derivált 0, és a deriváltfüggvény értékének előjele pozitívról negatívra vált.

$$T'(b) = \frac{\sqrt{25 - b^2}}{2} + \frac{b}{4\sqrt{25 - b^2}} \cdot (-2b) = \frac{50 - 2b^2 - 2b^2}{4\sqrt{25 - b^2}} = \frac{50 - 4b^2}{4\sqrt{25 - b^2}}$$

Ez a függvény pontosan akkor 0, ha $50 - 4b^2 = 0$, azaz $b = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ (a negatív gyököt nyilván nem vesszük figyelembe). Könnyen látszik, hogy az $50 - 4b^2$ lefelé nyitott parabola pont ennél az értéknél vált át pozitívról negatívra. Könnyen látszik, hogy ez globális maximum is, hiszen az értelmezési tartomány szélei felé T értéke a 0-hoz tart. Így a maximális terület:

$$T = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{25 - \frac{25}{2}}}{2} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{25}{4}.$$

5. Egy henger alakú hordót szeretnénk tervezni, amelynek a térfogata 20π. Hogy válasszuk meg a magasságát és az alapkörének a sugarát, hogy a lehető legkevesebb anyagból kijöjjön, azaz hogy a lehető legkisebb legyen a felszíne?

   Megoldás. A henger felszíne:

$$A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot m$$

ahol r az alapkör sugara és m a henger magassága. A henger térfogata:

$$V = r^2\pi m = 20\pi,$$

tehát $m = \frac{20}{r^2}$. Így a minimalizálandó függvény:

$$A(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{20}{r^2} = 2\pi\left(r^2 + \frac{20}{r}\right), \quad 0 < r < \infty.$$

Ott lesz lokális minimuma, ahol a derivált nulla, és a deriváltfüggvény előjele negatívról pozitívra vált.

$$A'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{20}{r^2}\right)$$

Ez a függvény pontosan akkor 0, ha $2r - \frac{20}{r^2} = 0$, azaz $\frac{2r^3-20}{r^2} = 0$. A tört pedig pontosan akkor nulla, ha számláló nulla, tehát ha $r = \sqrt[3]{10}$. Mivel a köbfüggvény szigorúan monoton nő, (és $r^2 > 0$) ezért látszik, hogy a deriváltfüggvény ennél az értéknél fog negatívról pozitívra váltani, így a függvénynek ebben a pontban lokális minimuma van. Könnyen látszik, hogy ez globális minimum is, hiszen az értelmezési tartomány szélei felé A értéke a végtelenbe tart.

Tehát $r = \sqrt[3]{10}$ és $m = \frac{20}{\sqrt[3]{100}}$ választása esetén lesz a lehető legkisebb a hordó felszíne.

Gyakorlófeladatok.

1. Az implicit deriválás módszerével határozzuk meg a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ deriváltat!

   (a) $y + 2xy + \cos x = x^3$

   (b) $\cos y + xy = 0$

   Eredmények.

   (a)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 + \sin x - 2y}{1 + 2x}$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{\sin y - x}$$

2. Legyen $x = -t^2 + 4$, $y = 6t - 2$. Milyen t érték esetén kapunk olyan érintőt, amely az x tengely pozitív felével 45°-os szöget zár be?

   Eredmény. $t = -3$

3. Egy doboz térfogatát a

$$V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x), \quad 0 < x < 5$$

   függvény adja meg.

   (a) Keressük meg V szélsőértékeit!

   (b) Mit jelentenek az (a) részben megoldásul kapott számok a doboz térfogatára nézve?

   Eredmények. V maximális értéke: $x = 2$ esetében 144, minimális értéke nincsen (a térfogat tetszőlegesen közel lehet nullához)

4.* Milyen hosszú a legrövidebb létra, amelyet ha nekitámasztunk egy 8 méter magas falnak, elér a 3 méterrel mögötte álló épületig?

   Ábra.