Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

7. Gyakorlat megoldásai

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+9}{2x^2+8}$

   (c) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$

   (d) $\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x$

   Megoldás. Ha egy függvényhányados határértékét szeretnénk kiszámítani, ahol a számlálóban és a nevezőben lévő függvény is 0-ba tart $\left(\frac{0}{0}\right)$ vagy pedig a nevezőben lévő függvény a végtelenbe tart $\left(\frac{\cdot}{\infty}\right)$, akkor a L'Hospital szabály azt állítja, hogy ha a két függvény deriváltja hányadosának határértéke létezik, akkor a két függvény hányadosának határértéke is létezik, és megegyezik a két függvény deriváltja hányadosának a határértékével.

   (a)
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{1} = 5$$

   (b)
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+9}{2x^2+8} \underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-3x+9)'}{(2x^2+8)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{4x} \underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

   (c)
   $$\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

   (d)
   $$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x = \lim_{x\to 0+} \exp(x\log\sin x) = \exp(\lim_{x\to 0+} x\log\sin x) = \exp\left(\lim_{x\to 0+} \frac{\log\sin x}{\frac{1}{x}}\right)$$

   $$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\sin x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'H}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot\cos x = -1\cdot 0\cdot 1 = 0$$

   Tehát:

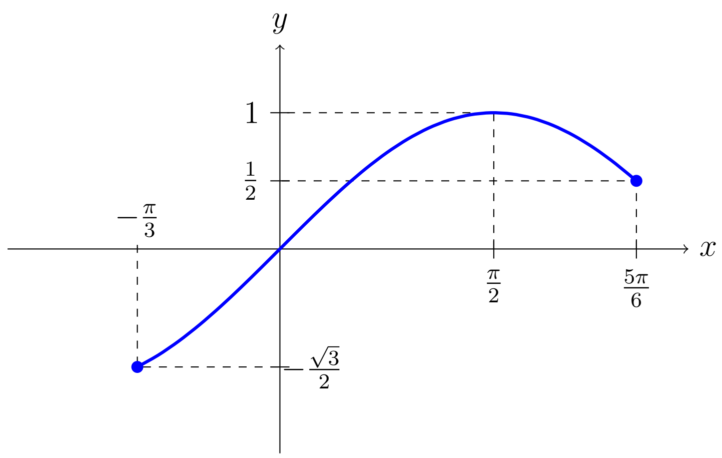
   $$\lim_{x\to 0+} (\sin x)^x = \exp(0) = 1.$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ globális szélsőértékeit!

   Megoldás. Lokális szélsőértéke egy függvénynek ott lehet, ahol a derivált 0. Globális szélsőértéke ott lehet, ahol lokális szélsőérték van, vagy pedig az értelmezési tartomány szélein.

   Mivel $f'(x) = \cos x$, és $\cos x = 0$ pontosan akkor, ha $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ezért lokális szélsőérték lehet $\frac{\pi}{2}$-ben (csak ez esik az értelmezési tartományba a lehetséges helyek közül).

   Mivel $f'(x) = \cos x > 0$, ha $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, ezért ezen az intervallumon nő a függvény. Valamint $f'(x) < 0$, ha $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$, azaz ezen az intervallumon csökken a függvény. Tehát f-nek $\frac{\pi}{2}$-ben lokális maximuma van. A lokális maximum érték 1, ennél nagyobb értéket a függvény nem vesz fel az értelmezési tartomány szélein se, hiszen $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, valamint $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} < 1$. Tehát $\frac{\pi}{2}$ globális maximumhely is, a globális maximumérték 1. A globális minimumhely pedig $-\frac{\pi}{3}$ lesz, a globális minimumérték $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, hiszen az értelmezési tartomány belsejében nem lehet minimumhely (hiszen csak egy helyen nulla a derivált, de az lokális maximumhely), a szélén pedig ez a legkisebb érték.



3. Igazak-e az alábbi állítások? Ha nem, mutassunk ellenpéldát!

   (a) Ha $f'(0) = 0$, akkor a függvénynek $x = 0$-ban lokális szélsőértéke van.

   (b) Ha $f''(0) = 0$, akkor a függvénynek $x = 0$-ban inflexiós pontja van.

   Megoldás.

   (a) Az állítás nem igaz. Például: ha $f(x) = x^3$, akkor $f'(x) = 3x^2$, így $f'(0) = 0$. De nincs lokális szélsőértéke a függvénynek nullában, hiszen a köbfüggvény szigorúan monoton nő az egész értelmezési tartományán.

   (b) Az állítás nem igaz. Például: ha $f(x) = x^4$, akkor $f''(x) = 12x^2$, így $f'(0) = 0$. De nincs inflexiós pontja a függvénynek a nullában, hiszen a függvény az egész értelmezési tartományán konvex.

4. Állapítsuk meg az $f(x) = 3x - x^3$ függvény legbővebb értelmezési tartományát és értékkészletét, folytonossági tartományait, határértékét az értelmezési tartománya szélein, szélsőértékeit, monotonitási és konvexitási tartományait, majd ábrázoljuk a függvénygrafikont!

Megoldás. A függvény legbővebb értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, és ennek minden pontjában folytonos.

$$\lim_{x\to+\infty} 3x - x^3 = \lim_{x\to+\infty} x(3-x^2) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 3x - x^3 = \lim_{x\to-\infty} x(3-x^2) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

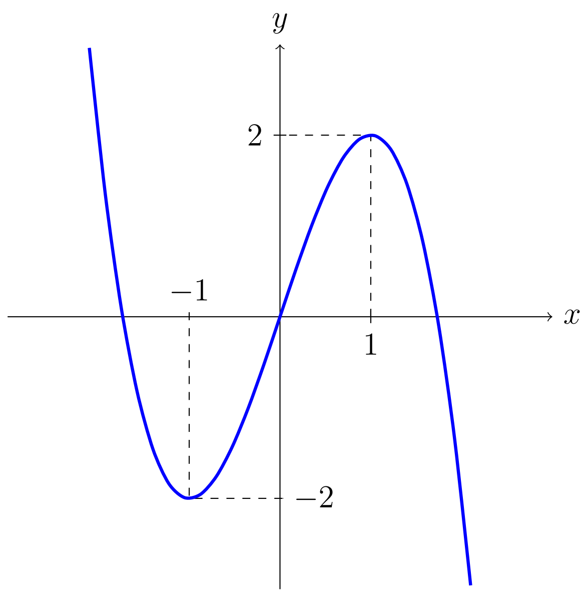
Mivel $f'(x) = 3 - 3x^2$, ezért $f'(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = \pm 1$. Valamint, $f''(x) = -6x$, ezért $f''(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$. Ez alapján a következő táblázatban foglalhatók össze f monotonitási és konvexitási tartományai, valamint a szélsőértékei:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f	$\searrow\cup$	lok. min.	$\nearrow\cup$	infl. pont	$\nearrow\cap$	lok. max.	$\searrow\cap$
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

A táblázatban $+$, $-$ a függvény előjelét jelenti az adott intervallumon, $\nearrow$ azt jelenti, hogy a függvény monoton nő, $\searrow$ azt jelenti, hogy a függvény monoton csökken, $\cup$ azt jelenti, hogy a függvény konvex, $\cap$ pedig azt, hogy a függvény konkáv az adott intervallumon.

A lokális minimumhely tehát $x = -1$, a minimumérték $f(-1) = -2$, a lokális maximumhely $x = 1$, a maximumérték $f(1) = 2$, az $x = 0$ inflexiós pontban pedig a függvényérték $f(0) = 0$.

Egy ábrán foglaljuk össze, amit megtudtunk a függvényről.



Az ábráról könnyen le lehet olvasni, hogy az értékkészlet $\mathbb{R}$.

Gyakorlófeladatok.

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

   (b) $\lim_{x\to 0+} x \log^2 x$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos ax}{\log \cos bx}$

(e) $\lim_{x\to 0+} x^x$

Eredmények.

(a) 0

(b) 0

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $\frac{a^2}{b^2}$

(e) 1

2. Határozzuk meg az $f(x) = 4 - x^2$, $-3 \leq x \leq 1$ globális szélsőértékeit!

   Eredmények. Globális minimum: $(-3, -5)$. Globális maximum: $(0, 4)$

3. Állapítsuk meg az $f(x) = x + \frac{1}{x}$ függvény legbővebb értelmezési tartományát és értékkészletét, folytonossági tartományait, határértékét az értelmezési tartománya szélein, szélsőértékeit, monotonitási és konvexitási tartományait, majd ábrázoljuk a függvénygrafikont!

   Ábra.