Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

6. Gyakorlat megoldásai

1. Számítsuk ki az alábbi függvények első deriváltját!

   (a) $f(x) = 2x - x^4 + 5$

   (b) $f(x) = x^3 e^x$

   (c) $f(x) = \cos(x^2) - \sin^2 x$

   (d) $f(x) = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

   (e) $f(x) = \frac{1}{\sin x} - 2\sqrt{x} + 8$

   (f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

   (g) $f(x) = \sin\sqrt{1 + 9x^4}$

   (h) $f(x) = \log\log x$

   Megoldás. Deriválási szabályok:

   - $(f+g)' = f' + g'$,
   - $(cf)' = cf'$, ahol $c \in \mathbb{R}$,
   - $(fg)' = f'g + fg'$,
   - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$,
   - $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$, azaz $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.

   Nevezetes függvények deriváltjai a képletgyűjteményben!

   (a)
   $$f'(x) = 2 - 4x^3 + 0 = 2 - 4x^3$$

   (b)
   $$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3 + x)x^2 e^x$$

   (c)
   $$f'(x) = -2x\sin(x^2) - 2\sin x\cos x = -2x\sin(x^2) - \sin 2x$$

(d)

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}(1+\cot x) - \cot x \cdot -\frac{1}{\sin^2 x}}{(1+\cot x)^2} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{(1+\cot x)^2} = -\frac{1}{(\sin x(1+\cot x))^2}$$
$$= -\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = -\frac{1}{1+2\sin x\cos x} = -\frac{1}{1+\sin 2x}.$$

(e)

$$f'(x) = -\sin^{-2} x\cos x - 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(f)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

(g)

$$f'(x) = \cos\sqrt{1+9x^4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+9x^4}} \cdot 9 \cdot 4x^3 = 18 \cdot \frac{x^3\cos\sqrt{1+9x^4}}{\sqrt{1+9x^4}}.$$

(h)

$$f'(x) = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$$

2. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{1}{9}\cot(3x-1)$ második deriváltját!

   Megoldás.

$$f'(x) = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sin^2(3x-1)} \cdot 3 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2(3x-1)}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{3} \cdot (-2)\sin^{-3}(3x-1)\cos(3x-1) \cdot 3 = \frac{2\cos(3x-1)}{\sin^3(3x-1)}$$

3. Legyen $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Mennyi $f'(0)$?

   Megoldás. Mivel $f(x) = x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, ezért

$$f'(x) = [x]' \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x \cdot [(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]',$$

   azaz

$$f'(x) = 1 \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x \cdot [(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]',$$

   Bármennyi is $[(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]'$, a 0-ban kiértékelve $x \cdot [(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]'$ biztosan 0 lesz. Tehát

$$f'(0) = (0-1)(0-2)(0-3)(0-4) + 0 = 24.$$

4. Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvénygörbe érintője mely x pontban lesz vízszintes? Írjuk fel az érintő egyenletét a $P(2,2)$ pontban!

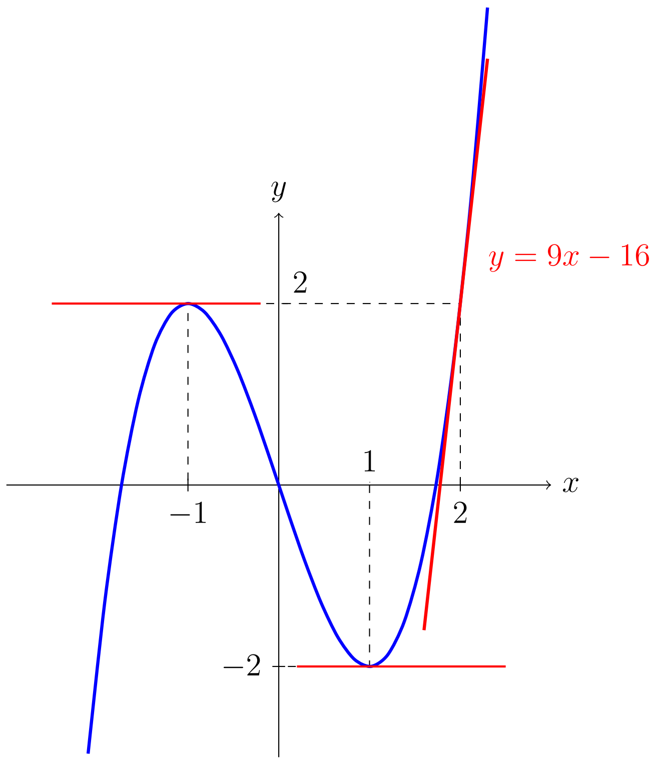
   Megoldás. Az érintő iránytangensét a deriváltfüggvény adott pontbeli értéke adja meg. Az érintő ott vízszintes, ahol az iránytangense 0, tehát ahol a derivált 0.

$$f'(x) = 3x^2 - 3,$$

valamint $3x^2 - 3 = 0$ pontosan akkor, ha $x = \pm 1$. Tehát az érintő a $Q(1, -2)$ és az $R(-1, 2)$ pontban vízszintes.

A $P(2, 2)$ pontban az érintő iránytangense $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$, így az érintőegyenes iránytangenses egyenlete:

$$y - 2 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y = 9x - 16$$



1. ábra. $f(x) = x^3 - 3x$

5. Van-e az

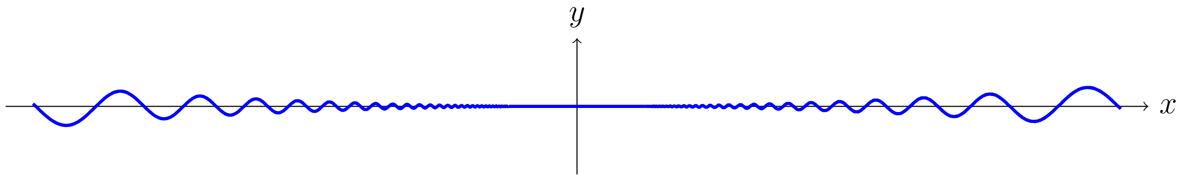
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvénygrafikonnak érintője az $x = 0$ pontban?

Megoldás. Ha értelmes az $x = 0$-ban a deriváltfüggvény, akkor van érintő. Akkor lesz értelmes a deriváltfüggvény az $x = 0$-ban, ha ott a különbségi hányadosnak létezik véges határértéke.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\sin y}{y} = 0,$$

ugyanis a sin függvény korlátos, azaz $-\frac{1}{y} \leq \frac{\sin y}{y} \leq \frac{1}{y}$ (elég nagy, azaz pozitív y-ra), és $\frac{1}{y}, -\frac{1}{y} \to 0$ amennyiben $y \to +\infty$, tehát a rendőr-elv miatt kapjuk a fenti határértéket. Hasonlóan kapunk nullát baloldali határértékre is. Tehát $f'(0) = 0$, azaz létezik érintő, és vízszintes.



2. ábra. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját!

   (a) $f(x) = \frac{2x+5}{3x-2}$

   (b) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

   (c) $f(x) = e^{-ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

   (e) $f(x) = \sin(\cos(2x - 5))$

   (f) $f(x) = \sin(x^2)\cos(2x)$

   Eredmények.

   (a) $f'(x) = -\frac{19}{(3x-2)^2}$

   (b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

   (c) $f'(x) = -2axe^{-ax^2}$, $a \in \mathbb{R}$

   (d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$

   (e) $f'(x) = -2\cos(\cos(2x-5))\sin(2x-5)$

   (f) $f'(x) = 2(x\cos(x^2)\cos(2x) - \sin(x^2)\sin(2x))$

2. Határozzuk meg $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ függvény n-edik deriváltját, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re!

   Eredmény.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 10x \\
f''(x) &= 6x - 10 \\
f'''(x) &= 6 \\
f^{(n)}(x) &= 0, \quad n \geq 4, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvénygörbék érintőjét a megadott pontokban! Hol lesz vízszintes az érintő?

   (a) $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $P(3,3)$

   (b) $f(x) = xe^{-2x^2}$, $P(1, e^{-2})$

   Eredmények.

(a) $y = -2x + 9$, az érintő sehol sem vízszintes

(b) $y = -3e^{-2}x + e^{-2}(3e^{-2} + 1)$, $x = \pm\frac{1}{2}$-ben vízszintes az érintő

4. Van-e az $f(x) = \operatorname{sgn} x$ függvénynek érintője az $x = 0$ pontban?

   Eredmény. Nincs.