# Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

# 5. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amelyen invertálhatóak az alábbi függvények, és számítsuk ki az erre megszorított függvény inverzét!

   (a) $f(x) = x^2$

   (b) $f(x) = \frac{1}{2}\log(-3x-1) - 5$

   **Megoldás.**

   (a) A legbővebb halmaz, amin kölcsönösen egyértelmű a függvény: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ vagy pedig $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$. Oldjuk meg a feladatot abban az esetben, amikor $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Ekkor $\mathcal{R}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

   Az inverzfüggvény az a leképezés, amely adott $y \in \mathcal{R}_f$-ről megmondja, melyik $x \in \mathcal{D}_f$ képe, azaz hogy mi $y$ ősképe. Azt tudjuk, hogy $y = x^2$ valamely $x \in \mathcal{D}_f$-re. Ebből azt kapjuk, hogy $x = \sqrt{y}$, hiszen $x \geq 0$. Tehát az $y$ a $\sqrt{y}$ képe, azaz a függvény, amely megadja $y$ ősképét éppen a gyökvonás. Így $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

   (b) Ez a függvény kölcsönösen egyértelmű lesz, ahol értelmes. Ott értelmes, ahol a logaritmus argumentuma pozitív, tehát ahol $-3x - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3}$. Tehát legyen $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3}\}$, ekkor $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$.

   Határozzuk meg adott $y \in \mathbb{R}$ ősképét!

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\log(-3x-1) - 5 \\ 2y + 10 &= \log(-3x-1) \\ e^{2y+10} &= -3x - 1 \\ x &= -\frac{1}{3}\left(e^{2y+10} + 1\right) \end{aligned}$$

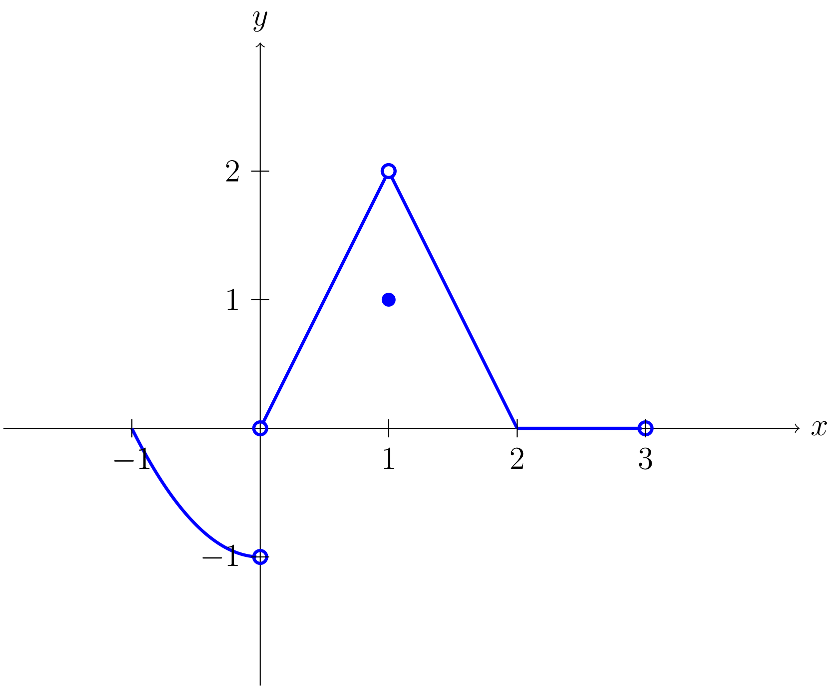
   Tehát az inverzfüggvény: $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}\left(e^{2x+10} + 1\right)$.

2. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & -1 \leq x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ -2x + 4 & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb- illetve baloldali határérték, valamint folytonosság, jobb-, illetve baloldali folytonosság szempontjából az $x = -1, 0, 1, 2$ és 3 helyeket. Van-e a függvénynek megszüntethető szakadása?

**Megoldás.** A függvény jobbról folytonos $-1$-ben, így a jobboldali határérték a helyet-




tesítési érték, azaz 0. A függvény nem folytonos 0-ban mert ott nincs is értelmezve, és a szakadás nem megszüntethető (azaz másodfajú), hiszen a jobboldali határérték 0, a baloldali $-1$. A függvény 1-ben nem folytonos, viszont a bal- és a jobboldali határérték is 2, ezért a szakadás megszüntethető. A függvény 2-ben folytonos, így a határérték a helyettesítési érték, azaz 0. A függvény 3-ban nem folytonos, mert nincs értelmezve, a baloldali határértéke 0.

3. Adjuk meg $a$ értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 3 \\ 2ax & x \geq 3 \end{cases}$$

függvény mindenütt folytonos legyen.

**Megoldás.** A függvény $x < 3$ és $x > 3$ esetben folytonos, egyedül $x = 3$-ban lehet gond. Válasszuk meg $a$ értékét úgy, hogy a függvény baloldali és jobboldali határértéke megegyezzen 3-ban.

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} x^2 - 1 = 9 - 1 = 8,$$

valamint

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} 2ax = 6a.$$

Tehát $6a = 8$ kell, azaz $a = \frac{4}{3}$.

4. Határozzuk meg az alábbi függvényhatárértékeket!

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

**Megoldás.**

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{1-\cos^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

**Gyakorlófeladatok.**

1. Invertálható-e az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény, ha az értelmezési tartomány a valós számok halmaza? Ha nem, melyik az a legnagyobb $a \in \mathbb{R}$ szám, hogy $(-\infty, a]$-n $f$ még invertálható? Határozzuk meg az inverzfüggvényt, amennyiben ilyen alakú az értelmezési tartomány!

   **Eredmény.** $a = 1$, $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$.

2. Ábrázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ -x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

   függvény grafikonját. Vizsgáljuk meg határérték, jobb illetve bal oldali határérték, valamint folytonosság, jobb, illetve baloldali folytonosság szempontjából az $x = -1, 0$ és 1 helyeket. Van-e a függvénynek megszüntethető szakadása?

   **Eredmény.** A függvény $-1$-ben folytonos, 0-ban megszüntethető szakadása van, 1-ben másodfajú.

3. Mely pontokban nem folytonosak az alábbi függvények? Határozzuk meg a szakadási helyek típusát is!

(a) $f(x) = \frac{1}{x-5} + 2$

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

(c) $f(x) = \frac{x \tan x}{x^2+1}$

**Eredmények.**

(a) $x = 5$, másodfajú

(b) $x = -1$, megszüntethető

(c) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, másodfajú

4. Mi legyen $A$ értéke, hogy az $f$ függvény folytonos legyen az $x = 2$ pontban is?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^3-8} & x \neq 2 \\ A & x = 2 \end{cases}$$

**Eredmény.** $A = \frac{1}{12}$

5.* Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 1 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy $f$ semelyik $x \in \mathbb{R}$ pontban sem folytonos.

**Segítség.** Használjuk, hogy tetszőleges nemüres nyílt intervallum tartalmaz racionális és irracionális számot is.

6. Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket!

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 7x}{2x}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

**Eredmények.**

(a) $\frac{4}{3}$

(b) $\frac{7}{2}$

(c) $\frac{2}{3}$