Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

4. Gyakorlat megoldásai

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi sorozatok monotonak, illetve korlátosak-e!

   (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$

   (b) $a_n = \frac{6^n}{n!}$

   Megoldás.

   (a) $a_n = \frac{3n+1}{n+1} = 3 - \frac{2}{n+1}$, és mivel $0 < \frac{2}{n+1} \leq 1$, a sorozat minden tagja 2 és 3 közé esik, tehát a sorozat korlátos. Valamint szigorúan monoton növő (minden tagja nagyobb, mint az őt megelőző). Ennek belátására ellenőrizzük, hogy $a_n < a_{n+1}$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re teljesül-e.

$$\begin{aligned}
a_n &< a_{n+1} \\
\frac{3n+1}{n+1} &< \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} \\
\frac{3n+1}{n+1} &< \frac{3n+4}{n+2} \\
(3n+1)(n+2) &< (3n+4)(n+1) \\
7n+2 &< 7n+4 \\
2 &< 4
\end{aligned}$$

   az utolsó sor pedig nyilván igaz, így visszafelé olvasva az érvelést látjuk hogy $a_n < a_{n+1}$ teljesül.

   (b) A sorozat első pár tagja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{6}{1} \\
a_2 &= \frac{6 \cdot 6}{1 \cdot 2} = a_1 \cdot \frac{6}{2} \\
a_3 &= \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = a_2 \cdot \frac{6}{3} \\
&\vdots \\
a_5 &= a_4 \cdot \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$$a_6 = a_5 \cdot \frac{6}{6}$$
$$a_7 = a_6 \cdot \frac{6}{7}$$

Így könnyű látni, hogy az ötödik tagig nő a sorozat, az ötödik és hatodik tag megegyezik, majd csökken. Tehát összességében a sorozat nem monoton, viszont korlátos: a maximális tagja $a_5 = a_6 = \frac{6^5}{5!}$: ez a felső korlát, az alsó korlát pedig 0.

2. Határozzuk meg az $a_n = \frac{3n-2}{n+8}$ sorozat határértékét, és a $\varepsilon = \frac{1}{10}$ hibához a legkisebb alkalmas küszöbindexet!
Megoldás.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{8}{n}} = \frac{3-0}{1+0} = 3$$
Szeretnénk meghatározni azt a legkisebb N természetes számot, amelyre az igaz, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - 3| < \varepsilon = 0.1$.
$$\left|\frac{3n-2}{n+8} - 3\right| < 0.1$$
$$\left|\frac{3n-2}{n+8} - \frac{3n+24}{n+8}\right| < 0.1$$
$$\left|\frac{-26}{n+8}\right| < 0.1$$
$$\frac{26}{n+8} < 0.1$$
$$26 < 0.1n + 0.8$$
$$252 < n$$
Tehát $N = 253$ jó küszöbindex lesz.

3. Határozzuk meg, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e vagy divergensek, konvergens esetben számítsuk ki a határértéket is!
   (a) $a_n = \frac{5n^3+3n+9}{4n^3+2n^2}$
   (b) $a_n = \frac{n!+n^6+3^n}{5^n+7n-1}$
   (c) $a_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2+1}$
   (d) $a_n = 1 + (-1)^n$
   (e) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$
   (f) $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
   (g) $a_n = \left(1 + \frac{4\sqrt{n}}{n+9}\right)^{5\sqrt{n}}$
   (h) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$
   (i) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

   Megoldás. Emlékeztető:

   - $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$,

- $\sqrt[n]{a} \to 1$ ha $a > 0$,
- $\sqrt[n]{n} \to 1$,
- erősorrend: $n^k \prec a^n \prec n! \prec n^n$, ahol $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$, valamint $\prec$ azt jelenti, hogy 'gyorsabban tart a végtelenbe',
- ha $a_n \to 0$, $b_n \to \pm\infty$, akkor $(1 + a_n)^{b_n} \to e^c$, ahol $c = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$.

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 3n + 9}{4n^3 + 2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{3}{n^2} + \frac{9}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{5 + 0 + 0}{4 + 0} = \frac{5}{4}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n! + n^6 + 3^n}{5^n + 7n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{5^n} + \frac{n^6}{5^n} + \frac{3^n}{5^n}}{1 + \frac{7n}{5^n} - \frac{1}{5^n}} = \frac{\infty + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = \infty,$$
tehát ez a sorozat divergens.

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \sqrt[n]{2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{0 \cdot 1}{1 + 0} = 0$$

(d) A sorozat minden páratlan sokadik tagja 0, minden páros sokadik tagja 2, tehát a sorozat divergens.

(e)
$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 1$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \log e = 1$$

(g)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4\sqrt{n}}{n + 9}\right)^{5\sqrt{n}} = e^c,$$
ahol
$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt{n}}{n + 9} \cdot 5\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{20n}{n + 9} = 20.$$
Tehát:
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4\sqrt{n}}{n + 9}\right)^{5\sqrt{n}} = e^{20}.$$

(h)
$$(\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2 + n} \leq \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^2} = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2$$
Mivel $(\sqrt[n]{n})^2 \to 1^2 = 1$ és $\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \to 1 \cdot 1^2 = 1$, ezért a rendőr-elv alapján $\sqrt[n]{n^2 + n} \to 1$.

(i)
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n})}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + n - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 1$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok torlódási pontjait!

   (a) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

   (b) $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{n^2+4}{2n^2-3n}$

   Megoldás.

   (a) A sorozat páros sokadik tagjaiból képzett részsorozat $a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1$, a páratlan sokadik tagjaiból képzett részsorozat pedig $a_{2k+1} = -1 - \frac{1}{2k+1} \to -1$, tehát a sorozat két torlódási pontja 1 és -1.

   (b) Először azt vegyük észre, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{2n^2-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n^2}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}.$$

   Valamint,

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 1 & \text{ha } n = 4k \text{ alakú} \\ -1 & \text{ha } n = 4k+2 \text{ alakú} \end{cases}$$

   Tehát a sorozat felbomlik három konvergens részsorozatra: $a_{2k+1} = 0 \to 0$, $a_{4k} = \frac{(4k)^2+4}{2(4k)^2-3(4k)} \to \frac{1}{2}$, valamint $a_{4k+2} = -\frac{(4k+2)^2+4}{2(4k+2)^2-3(4k+2)} \to -\frac{1}{2}$. Tehát a torlódási pontok: $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$.

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg, hogy az alábbi sorozatok monotonak illetve korlátosak-e!

   (a) $a_n = n + (-1)^n n^2$

   (b) $a_n = 2 - \frac{2}{n}$

   (c) $a_n = \left\{\frac{n}{2}\right\}$ ($\{\cdot\}$:törtrész)

   Eredmények.

   (a) Nem monoton, nem korlátos.

   (b) Monoton nő, korlátos.

   (c) Nem monoton, korlátos.

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $a_n = \frac{n^2+3\cdot 6^n - n!}{9n!+2\cdot 7^n}$

   (b) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

   (c) $a_n = \frac{(-1)^n}{6n+2}$

   (d) $a_n\sqrt{\frac{5n+n^4}{8n^4+3}}$

   (e) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

   (f) $a_n = \left(1 + \frac{3}{2^n+5}\right)^{2^n-4}$

(g) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

Eredmények.

(a) $-\frac{1}{9}$

(b) $\frac{1}{2}$

(c) 0

(d) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

(e) 1

(f) e^3

(g) $\frac{1}{2}$

3. Határozzuk meg a legkisebb küszöbindexet az adott ε hibához!

   (a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{100}$

   (b) $a_n = \frac{3^n}{3^{n+1}+2}, \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

   Eredmények.

   (a) $N = 11$

   (b) $N = 9$