Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

3. Gyakorlat megoldásai

1. Írjuk fel az alábbi egyenesek paraméteres egyenletrendszerét!

   (a) Legyen e a $P(1,2,3)$ ponton átmenő, $(1,1,1)$ vektorral párhuzamos egyenes.

   (b) Legyen f a $2x+y+z=0$ egyenletű síkra merőleges, azt a $Q(1,0,-2)$ pontban metsző egyenes.

   Megoldás. Az e egyenes paraméteres egyenletrendszere, amennyiben illeszkedik rá a $P(p_1,p_2,p_3)$ pont és $v=(v_1,v_2,v_3)$ egy irányvektora:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + tv_1 \\ y &= p_2 + tv_2 \\ z &= p_3 + tv_3, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Az S sík egyenlete, amennyiben illeszkedik rá a $P(p_1,p_2,p_3)$ pont és $n=(n_1,n_2,n_3)$ egy normálvektora:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$$

   (a) Az e egyenesen rajta van a $P(1,2,3)$ pont, egy irányvektora a $v=(1,1,1)$ vektor. Így a paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 + t \\ z &= 3 + t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (b) Az f egyenesen rajta van a $Q(1,0,-2)$ pont, és merőleges a $2x+y+z=0$ egyenletű síkra, így a sík egy normálvektora az egyenes egy irányvektora lesz. A sík egy normálvektora $n=(2,1,1)$. Így az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 0 + t \\ z &= -2 + t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Keressük meg az $x=2t+1$, $y=3t+2$, $z=4t+3$, valamint az $x=s+2$, $y=2s+4$, $z=-4s-1$ egyenesek metszéspontját, majd írjuk fel az egyenesek által meghatározott sík egyenletét!

Megoldás. A metszéspontot úgy kapjuk meg, ha megtaláljuk azt az (x, y, z) koordinátájú pontot, amely mindkét egyenletrendszert kielégíti. Mivel $x = 2t + 1$ és $x = s + 2$ ezért

$$2t + 1 = s + 2 \quad \Rightarrow \quad s = 2t - 1.$$

Valamint, mivel $y = 3t+2$ és $y = 2s+4$, ezért $3t+2 = 2s+4 = 2(2t-1)+4 = 4t+2$, tehát $t = 0$ (és $s = -1$). Azaz a metszéspont koordinátái $(2\cdot 0+1, 3\cdot 0+2, 4\cdot 0+3) = (1, 2, 3)$. Így már tudjuk az egyenesek által meghatározott sík egy pontját is, még szükségünk van egy normálvektorára ahhoz, hogy fel tudjuk írni az egyenletét. Az első egyenes egy irányvektora $u = (2, 3, 4)$, a másodiké $v = (1, 2, -4)$. Ezek elemei a síknak, nem párhuzamosak. A vektoriális szorzatuk éppen a síkra merőleges vektor lesz, tehát jó lesz normálvektornak.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12i + 4j + 4k - 3k - 8i + 8j = -20i + 12j + k$$

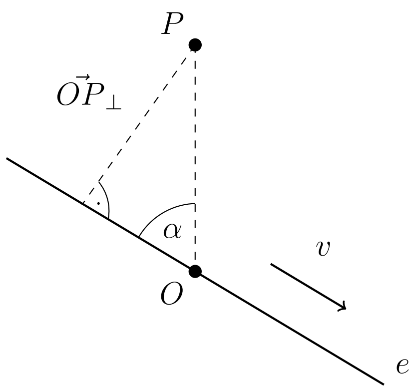
Tehát a sík egyenlete: $-20x + 12y + z = -20\cdot 1 + 12\cdot 2 + 1\cdot 3$, azaz $-20x + 12y + z = 7$.

3. Határozzuk meg a $P(0, 0, 12)$ pont és az $e : x = 4t,\ y = -t,\ z = 2t$ egyenes távolságát!

Megoldás. Az egyenesen rajta van az $O(0, 0, 0)$ pont, és egy irányvektora a $v = (4, -1, 2)$ vektor. Ekkor $\vec{OP} = (0, 0, 12)$ és $|\vec{OP}| = 12$. Ennek a vektornak az egyenesre vett merőleges komponensének a hossza megadja a P pont és az egyenes távolságát. Ez pedig a következőképpen számolható:

$$|\vec{OP}_\perp| = |\vec{OP}| \sin\alpha = 12 \sin\alpha,$$

ahol α a $\vec{OP}$ és az egyenes bezárt szöge, azaz másképpen mondva $\vec{OP}$ és v bezárt szöge.



Két vektor bezárt szögének a koszinuszát úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbben, ha kétféleképpen felírjuk a skaláris szorzatukat (és a két felírás nyilván ugyanazt adja). Így:

$$\begin{aligned} |\vec{OP}| \cdot |v| \cdot \cos\alpha &= 0\cdot 4 + 0\cdot(-1) + 12\cdot 2 \\ 12\sqrt{16+1+4}\cdot\cos\alpha &= 24 \\ \cos\alpha &= \frac{2}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

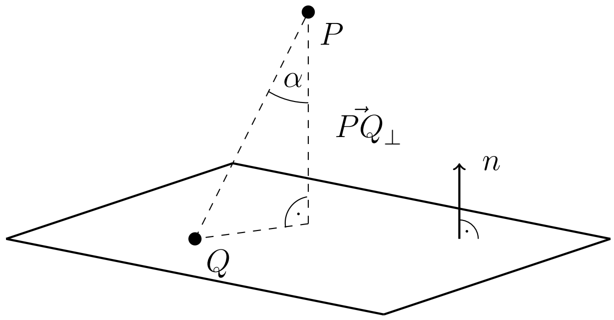
Ebből $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{21}} = \sqrt{\frac{17}{21}}$. Így a P pont és az egyenes távolsága $= |\vec{OP}_\perp| = 12\cdot\sqrt{\frac{17}{21}}$.

4. Határozzuk meg a $P(0,-1,0)$ pont és a $2x+y+2z=4$ sík távolságát!

Megoldás. Legyen $Q(1,0,1)$, ez rajta van a síkon. Ekkor $\vec{PQ}=(1,1,1)$, a hossza $|\vec{PQ}|=\sqrt{3}$. Ennek a vektornak a síkra vett merőleges komponensének a hossza a P pont és a sík távolsága. Ez a következőképpen számolható:

$$|\vec{PQ}_\perp| = |\vec{PQ}|\cos\alpha,$$

ahol α a $\vec{PQ}$ vektornak a síkra merőleges iránnyal bezárt szöge, másképpen mondva $\vec{PQ}$ vektornak a sík $n=(2,1,2)$ normálvektorával bezárt szöge.



Két vektor bezárt szögének a koszinuszát úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbben, ha kétféleképpen felírjuk a skaláris szorzatukat (és a két felírás nyilván ugyanazt adja). Így:

$$\begin{aligned}|\vec{PQ}|\cdot|n|\cdot\cos\alpha &= 1\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2\\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{4+1+4}\cdot\cos\alpha &= 5\\ \cos\alpha &= \frac{5}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

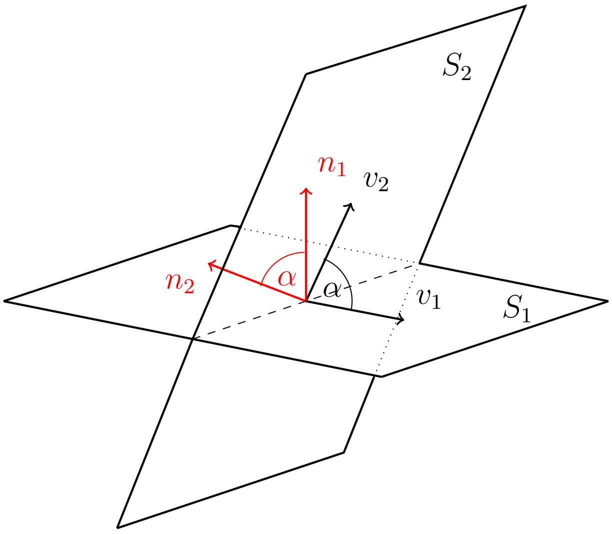
Így a pont és a sík távolsága $\frac{5}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=\frac{5}{3}$.

5. Határozzuk meg az $x+y=1$ és a $2x+y-2z=2$ síkok szögét!

Megoldás. Két sík hajlásszögét úgy tudjuk meghatározni, hogy ha veszünk mindkét síkban egy-egy a metszésvonalra merőleges vektort, és ezek közrezárt szögét kiszámítjuk. Legyen n_1 az $S_1: x+y=1$ normálvektora, n_2 a $S_2: 2x+y-2z=2$ síké. Ha veszünk az S_1 síkban egy a metszésvonalra merőleges v_1 vektort, akkor az benne lesz n_1,n_2 vektorok síkjában és merőleges lesz n_1-re. Hasonlóan, ha veszünk az S_2 síkban egy a metszésvonalra merőleges v_2 vektort, akkor az benne lesz n_1,n_2 síkjában, és merőleges lesz n_2-re. Így az S_1 és S_2 sík normálvektorának a bezárt szöge ugyanaz, mint v_1 és v_2 bezárt szöge, mivel merőleges szárú szögek az n_1,n_2 síkjában. Tehát a két normálvektor közrezárt szöge megadja a két sík hajlásszögét. Az S_1 normálvektora $(1,1,0)$, S_2 normálvektora $(2,1,-2)$. Mivel

$$\begin{aligned}\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+1+4}\cdot\cos\alpha &= 1\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot(-2)\\ 3\sqrt{2}\cos\alpha &= 3\\ \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

így a bezárt szög $\frac{\pi}{4}$.



1. ábra. A piros szög valójában a fekete szög 90°-al elforgatva n_1, n_2 síkjában a metszésvonal körül

Gyakorlófeladatok.

1. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(1, 1, 1)$ ponton, és párhuzamos az y tengellyel!

   Eredmény.

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 + t \\ z &= 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az x tengelyre, és azt a $P(0, 0, 6)$ pontban metszi!

   Eredmény. $x = 6$

3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2, 1, -1)$ ponton és merőleges a $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$ síkok metszésvonalára!

   Eredmény. $x - y + z = 0$

4. Határozzuk meg a $2x - y + z = 5$ és $3x + y - 2z = 3$ síkok metszeteként előálló egyenes egyenletrendszerét!

   Eredmény.

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= -6 + 7t \\ z &= -3 + 5t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$