Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

2. Gyakorlat megoldásai

1. Legyen $u = (3, -2, 1)$ és $v = (-2, 5, 0)$. Határozzuk meg $\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v$ komponenseit és hosszát!

   Megoldás.

$$\frac{3}{5}u + \frac{4}{5}v = \frac{3}{5}(3, -2, 1) + \frac{4}{5}(-2, 5, 0) = \left(\frac{9}{5}, \frac{-6}{5}, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{-8}{5}, \frac{20}{5}, \frac{0}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

   A hossza:

$$\left|\left(\frac{1}{5}, \frac{14}{5}, \frac{3}{5}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{196}{25} + \frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{206}}{5}$$

2. Legyen $P_1 = (-1, 1, 6)$ és $P_2 = (3, 5, 0)$ Határozzuk meg a P_1-et P_2-vel összekötő szakasz irányvektorát és felezőpontjának koordinátáit!

   Megoldás. Az összekötő szakasz iránya megegyezik $P_1 - P_2$ vektor irányával, tehát a szakasz egy irányvektora $(-1, 1, 6) - (3, 5, 0) = (-4, -4, 6)$. A felezőpontba mutató vektor éppen $\frac{P_1+P_2}{2}$, tehát a koordinátái $\frac{1}{2}((-1, 1, 6) + (3, 5, 0)) = \frac{1}{2}(2, 6, 6) = (1, 3, 3)$.

3. Legyen $u = (10, 11, -2)$, $v = (0, 3, 4)$. Határozzuk meg u és v közrezárt szögét! Hogy változtassuk meg v harmadik koordinátáját, ha azt szeretnénk hogy a két vektor merőleges legyen egymásra?

   Megoldás. Amennyiben γ a közrezárt szög, definíció szerint $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\gamma$. De a skaláris szorzatot ki lehet számolni úgy is, mint $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ (ahol u_i, v_i, $i = 1, 2, 3$ az u és v vektorok koordinátái). Tehát

$$|u| \cdot |v| \cdot \cos\gamma = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|u| \cdot |v|}.$$

   Mivel $|u| = \sqrt{10^2 + 11^2 + (-2)^2} = 15$, $|v| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$, $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 10 \cdot 0 + 11 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 25$, ezért

$$\cos\gamma = \frac{25}{5 \cdot 15} = \frac{1}{3}.$$

   Ha két vektor közrezárt szöge alatt természetes módon a kisebbet értjük, akkor $\gamma \approx 70.53°$.

   Ha $u = (10, 11, -2)$ és $v = (0, 3, v_3)$ merőlegesek egymásra, akkor annak kell teljesülnie $u \cdot v = 0$, tehát $11 \cdot 3 - 2 \cdot v_3 = 0$, azaz $v_3 = \frac{33}{2}$.

4. Számítsuk ki $u\times v$ és $v\times u$ vektoriális szorzatot, amennyiben $u = (2, 0, 1)$ és $v = (0, -3, 1)$!

Megoldás. Vektoriális szorzatot a Sarrus-szabály segítségével érdemes számolni. Ezt az alábbi ábra szemlélteti. A sima nyilak mentén vett szorzatokat pozitív, a szaggatott nyilak mentén vett szorzatokat negatív előjellel kell összeadni. Így megkapjuk az i, j, k bázisvektorok együtthatóiként a vektoriális szorzat koordinátáit.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \end{array}\right. \\
\begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}
\end{array}$$

A Sarrus-szabály segítségével a következőket kapjuk:

$$u \times v = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right| = i \cdot 0 \cdot 1 + j \cdot 1 \cdot 0 + k \cdot 2 \cdot (-3) - k \cdot 0 \cdot 0 - i \cdot 1 \cdot (-3)$$
$$- j \cdot 2 \cdot 1 = 3i - 2j - 6k,$$
$$v \times u = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right| = i \cdot (-3) \cdot 1 + j \cdot 1 \cdot 2 + k \cdot 0 \cdot 0 - k \cdot (-3) \cdot 2 - i \cdot 1 \cdot 0$$
$$- j \cdot 0 \cdot 1 = -3i + 2j + 6k.$$

5. Számítsuk ki a PQR háromszög területét, amennyiben $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 3, 1)$, $R = (0, 0, 2)$!

Megoldás. Legyen $u = \vec{PQ} = (1, 2, 0)$ és $v = \vec{PR} = (-1, -1, 1)$. Ekkor $|u \times v|$ éppen az u és v által kifeszített paralelogramma területe, tehát a keresett háromszög területének a kétszerese. Így

$$T_\Delta = \frac{1}{2}|u \times v|.$$

Mivel

$$u \times v = \left|\begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right| = i \cdot 2 \cdot 1 + j \cdot 0 \cdot (-1) + k \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$- k \cdot 2 \cdot (-1) - i \cdot 0 \cdot (-1) - j \cdot 1 \cdot 1 = 2i - 1j + k,$$

ezért $|u \times v| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$. Tehát $T_\Delta = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. Számítsuk ki az $u = (2, 1, 0)$, $v = (2, -1, 2)$ és $w = (1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon valamint tetraéder térfogatát!

Megoldás. A paralelepipedon térfogatát a három vektor vegyesszorzatának abszolútértéke adja, amit szintén a Sarrus-szabállyal számolhatunk, a következőképpen:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_1 & w_2 \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{ccccc} - & - & - & & \\ \end{array}$$

Tehát a mi esetünkben az alábbi módon számolunk:

$$(uvw) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right| = 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$- 1 \cdot 2 \cdot 0 = 2 - 8 = -6.$$

Így a térfogata a paralelepipedonnak $V_{pp} = |(uvw)| = 6$. A tetraéder térfogata pedig éppen a paralelepipedon térfogatának a hatoda, azaz $V_{tetra} = 1$.

Gyakorlófeladatok.

1. Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy $u = (1, 2, \sqrt{2})$ és $v = (a, 0, 3)$ vektorok bezárt szöge $\frac{\pi}{4}$ legyen!

   Eredmény. $a = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

2.* Bizonyítsuk be, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

3. Számítsuk ki a $P = (2, -2, 1)$, $Q = (3, -1, 2)$, $R = (3, -1, 1)$ pontok által meghatározott háromszög területét!

   Eredmény. $T = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Az a paraméter mely értékeire feszítenek ki az $(a, 1, 1)$, $(1, a, 1)$, $(1, 1, a)$ vektorok valódi (nem elfajult) paralelepipedont? (Azaz milyen a-kra lesz pozitív a térfogat?)

   Eredmény. $a \neq 1, -2$

5.* Igaz-e tetszőleges u, v, w térvektorokra, hogy $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$?

   Segítség: Igen.