Matematika A1a Analízis – Építőmérnököknek

1. Gyakorlat megoldásai

1. Végezzük el a műveleteket!

   (a) $(3+2i)(5-4i)+(2+i)$

   (b) $\frac{(3-2i)^2}{1+i}$

   (c) $\frac{\overline{25+i}}{3-4i}$

   Megoldás. Emlékeztető: i olyan szám, amelyre az teljesül hogy $i^2=-1$. Az $a+b\cdot i$ alakú számokat komplex számoknak nevezzük (itt a,b valós számok, a a komplex szám valós része, b a képzetes része). Komplex szám konjugáltja: $\overline{a+b\cdot i}=a-b\cdot i$.

   (a)

$$(3+2i)(5-4i)+(2+i)=15-12i+10i-8i^2+2+i=15-12i+10i+8+2+i=25-i$$

   (b)

$$\frac{(3-2i)^2}{1+i}=\frac{(3-2i)^2}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{(9-12i-4)(1-i)}{1-i+i+1}=\frac{9-12i-4-9i-12+4i}{2}=$$
$$=\frac{-7-17i}{2}=-\frac{7}{2}-\frac{17}{2}i$$

   (c)

$$\frac{\overline{25+i}}{3-4i}=\frac{25-i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=\frac{75+100i-3i+4}{9-12i+12i+16}=\frac{79}{25}+\frac{97}{25}i$$

2. Írjuk fel az alábbi komplex szám algebrai alakját!

$$3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

   Megoldás. A komplex szám algebrai alakja: $a+b\cdot i$, ahol a,b valós számok. Hozzuk a kifejezést ilyen alakra!

$$3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

3. Írjuk fel az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

   (a) $1+i$

   (b) $1-\sqrt{3}i$

   (c) $-3-\sqrt{3}i$

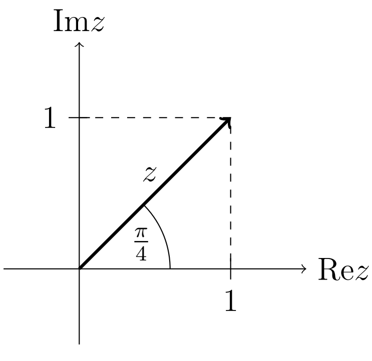
Megoldás. Egy $a+b\cdot i$ komplex számnak megfelel az (a,b) számpár, a számpárnak pedig megfelel egy helyvektor a síkon. Így gondolhatunk a komplex számra, mint egy síkbeli helyvektorra. A komplex szám trigonometrikus alakja: $r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$, ahol r a helyvektor hossza, φ pedig az elfordulása az x tengely pozitív ágától radiánban, $\varphi\in[0,2\pi]$, neve argumentum. Képlet a kiszámítására (nem javaslom a használatát, mert komplikált):

$$\varphi(a+b\cdot i)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{ha } a>0,\ b\geq 0\\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi & \text{ha } a>0,\ b<0\\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)-\pi & \text{ha } a<0,\ b\geq 0\\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & \text{ha } a<0,\ b<0\\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a=0,\ b>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a=0,\ b<0\\ \text{tetszőleges} & \text{ha } a=0,\ b=0\end{cases}$$

Sokkal egyszerűbb ábrát készíteni, és arról leolvasni!

(a) Legyen $z=1+i$. Ekkor az ábra alapján nyilvánvaló, hogy a komplex szám argumentuma 45°, azaz $\frac{\pi}{4}$ radián. Vagy pedig képlet segítségével: $\arctan\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$, és mivel $a,b>0$, z argumentuma $\frac{\pi}{4}$. Valamint, $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Tehát:

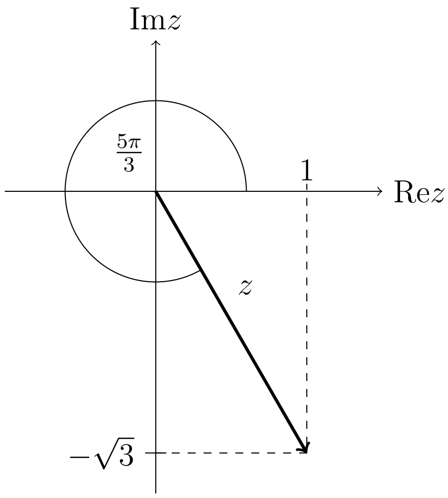
$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$



1. ábra. $z=1+i$

(b) Legyen $z=1-\sqrt{3}i$. Ekkor az ábra alapján, és a nevezetes háromszögek szögeinek ismeretében nyilvánvaló, hogy $\varphi=300^\circ$, azaz $\frac{5\pi}{3}$ radián. Vagy pedig képlettel: $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}$, és mivel $a>0$, $b<0$ z argumentuma $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$. Valamint, $r=\sqrt{3+1}=2$. Tehát:

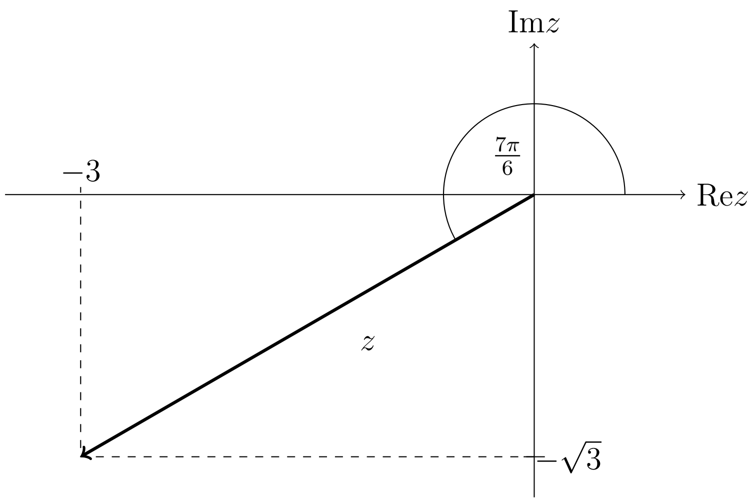
$$z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$



2. ábra. $z = 1 - \sqrt{3}i$

(c) Legyen $z = -3 - \sqrt{3}i$. Ekkor az ábra alapján, és a nevezetes háromszögek szögeinek ismeretében nyilvánvaló, hogy $\varphi = 210°$, azaz $\frac{7\pi}{6}$ radián. Vagy pedig képlettel: $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right) = \frac{\pi}{6}$, és mivel $a, b < 0$, z argumentuma $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Valamint, $r = \sqrt{3+9} = \sqrt{12}$. Tehát:

$$z = \sqrt{12}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$



3. ábra. $z = -3 - \sqrt{3}i$

4. Végezzük el az alábbi műveleteket!

(a) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2010}$

(b) $\sqrt{1+i}$

Megoldás. A komplex számok trigonometrikus alakja azért hasznos, mert ebben az alakban könnyű őket hatványozni. A de Moivre-féle képlet a hatványozásra a következő:

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Rightarrow z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad (n \in \mathbb{N})$$

Képlet gyökvonásra:

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \Rightarrow z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right),$$
$$(k = 0, \ldots, n-1, n \in \mathbb{N})$$

Vegyük észre, hogy egy komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van!

(a) Legyen $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Ekkor z trigonometrikus alakja:

$$z = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right),$$

így

$$z^{2010} = \cos\left(\frac{8040\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{8040\pi}{3}\right) = \cos(2680\pi) + i\sin(2680\pi) = 1 + i\cdot 0 = 1.$$

(b) Legyen $z = 1 + i$. Ekkor z trigonometrikus alakja:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

így

$$(\sqrt{z})_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right),$$
$$(\sqrt{z})_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right).$$

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a komplex számok halmazán!

$$|z| - z = 1 + 2i$$

Megoldás. Legyen $z = a + b\cdot i$. Ekkor az egyenletünk:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2+b^2} - a - b\cdot i &= 1 + 2i \\
\sqrt{a^2+b^2} &= 1 + a + (2+b)i \\
a^2 + b^2 &= (1+a)^2 + 2(1+a)(2+b)i - (2+b)^2
\end{aligned}$$

Az egyenlőség két oldalán álló két komplex szám csak úgy egyezhet meg, ha a valós és a képzetes részük is megegyezik, tehát a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = (1+a)^2 - (2+b)^2 \\ 0 = 2(1+a)(2+b) \end{cases}$$

A második egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $a = -1$, vagy $b = -2$. Az $a = -1$ esetben az első egyenletből a következőt kapjuk b-re:

$$\begin{aligned} 1 + b^2 &= -2 - b^2 - 4b \\ 2b^2 + 4b + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek nincs valós megoldása. A $b = -2$ esetben az első egyenletből a következőt kapjuk a-ra:

$$\begin{aligned} a^2 + 4 &= (1 + a)^2 \\ 4 &= 1 + 2a \\ \frac{3}{2} &= a \end{aligned}$$

Tehát a megoldása az egyenletnek $z = \frac{3}{2} - 2i$.

Gyakorlófeladatok.

1. Végezzük el az alábbi műveleteket!

   (a) $(i - 2)(5 - 3i)$

   (b) $\frac{1}{i}$

   (c) $\sqrt[4]{-16}$

   (d) $(1 - i)^4$

   Eredmények.

   (a) $-7 + 11i$

   (b) $-i$

   (c)

   $$\begin{aligned} (\sqrt[4]{-16})_1 &= \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ (\sqrt[4]{-16})_2 &= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ (\sqrt[4]{-16})_3 &= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\ (\sqrt[4]{-16})_4 &= \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

   (d) -4

2. Írjuk fel az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

   (a) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

   (b) 8

   Eredmények.

   (a) $2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

   (b) $8(\cos 0 + i \sin 0)$

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán!

(a) $z^2 - 6z + 13 = 0$

(b) $z^3 = 1 + i$

(c) $z^2 = \bar{z}$

Eredmények.

(a) $3 \pm 2i$

(b)

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)\\
z_3 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0,\\
z_2 &= 1,\\
z_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\\
z_4 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$