Kongruenciahálók és a szegedi ACTA

2008. december 17.

Szőkefalvi-Nagy Gyula feleségével

Szőkefalvi-Nagy Béla átveszi a König Gyula érmét, 1942.

AZ ELSŐ DOLGOZAT:

- A kongruenciahálók jellemzése, 1963.

ELŐZMÉNYEK

- Ekvivalenciaháló, **Eq**(H)
- Whitman (1946): *Minden L háló részhálója egy* **Eq**(H) *ekvivalencia-hálónak*
- Pudlák-Tuma (1976): *Ha L véges, úgy H választható végesnek*
- Szimmetrikus csoport, $\boldsymbol{S}_H$
- Cayley tétel: *Minden csoport részcsoportja egy szimmetrikus csoportnak*
- *Ha G véges akkor H választható végesnek*

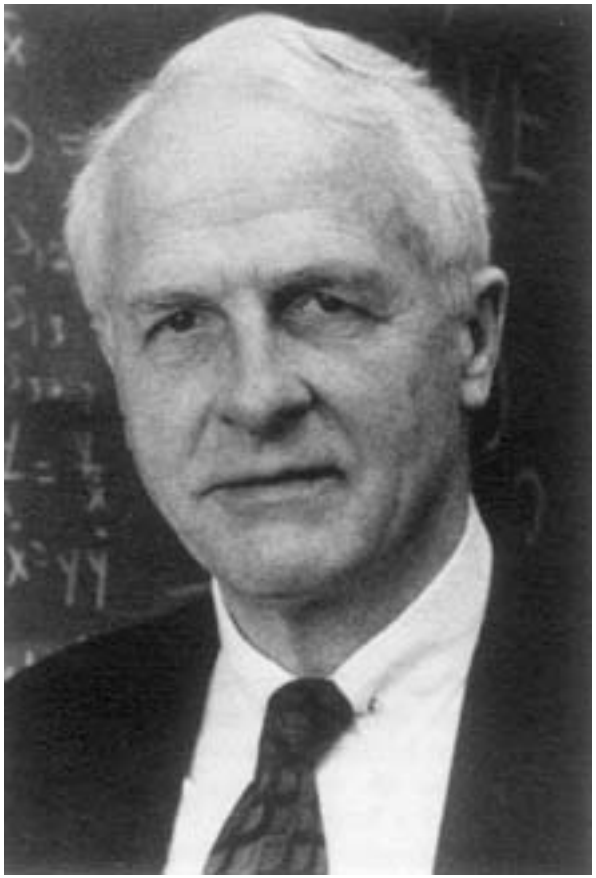
ALGEBRAI HÁLÓK

L **algebrai háló**, ha

- teljes,
- minden eleme kompakt elemek szupremuma

<u>Ekvivalens feltétel</u>:

- *S* = **Comp** *L*, az *L* háló kompakt kongruenciáinak a félhálója. *L* az *S* félháló ideálhálója: ***I(S)***



Garrett Birkhoff (1911-1996)

1963. az Acta-ban:

Characterizations of congruence lattices of abstract algebras,
Acta Sci. Math. (Szeged), **24,** 34-59

Tétel (Grätzer-Schmidt). *Minden algebrai háló izomorf egy algebra kongruenciahálójával.*

Egy híres probléma

- Igaz-e, hogy minden véges háló egy véges algebra kongruenciahálója ?

Mindmáig megoldatlan

Pálfy-Pudlák (1980) kimutatták hogy ez a kérdés ekvivalens egy csoportelméleti problémával.

A MÁSODIK DOLGOZAT

- Hálók kongruenciahálói, 1981.

Disztributiv hálók kongruenciahálói

Hálók kongruenciahálói disztributív hálók

- **Comp** *L*, az *L* háló kompakt kongruenciáinak a félhálója.

Probléma: Mely disztributív *S* félháló áll elő **Comp** *L* formában ?

Ha előáll, úgy azt mondjuk, hogy *S reprezentálható*..

1981. az Acta-ban:

The ideal lattice of a distributive lattice with 0 is the congruence lattice of a lattice,
Acta Sci. Math. (Szeged) 43 (1981), 153-168

- **Tétel.** *Minden disztributív háló izomorf egy háló kompakt kongruenciáinak félhálójához*.

A TÖRTÉNET FOLYTATÁSA

REPREZENTÁLHATÓ DISZTRIBUTÍV FÉLHÁLÓK

Az S disztributív félháló reprezentálható, ha

- *S* ***egy háló***

  Schmidt, 1981.;
  később más bizonyítást adott Pavel Pudlák, 1985.

- *S* ***lokálisan megszámlálható***

  azaz minden *s* eleme *S-re,* (*s*] megszámlálható,

  Huhn András, 1983, függetlenül H. Dobbertin,

- $|S| \leq \aleph_1$

  Huhn András, 1989. az Acta-ban

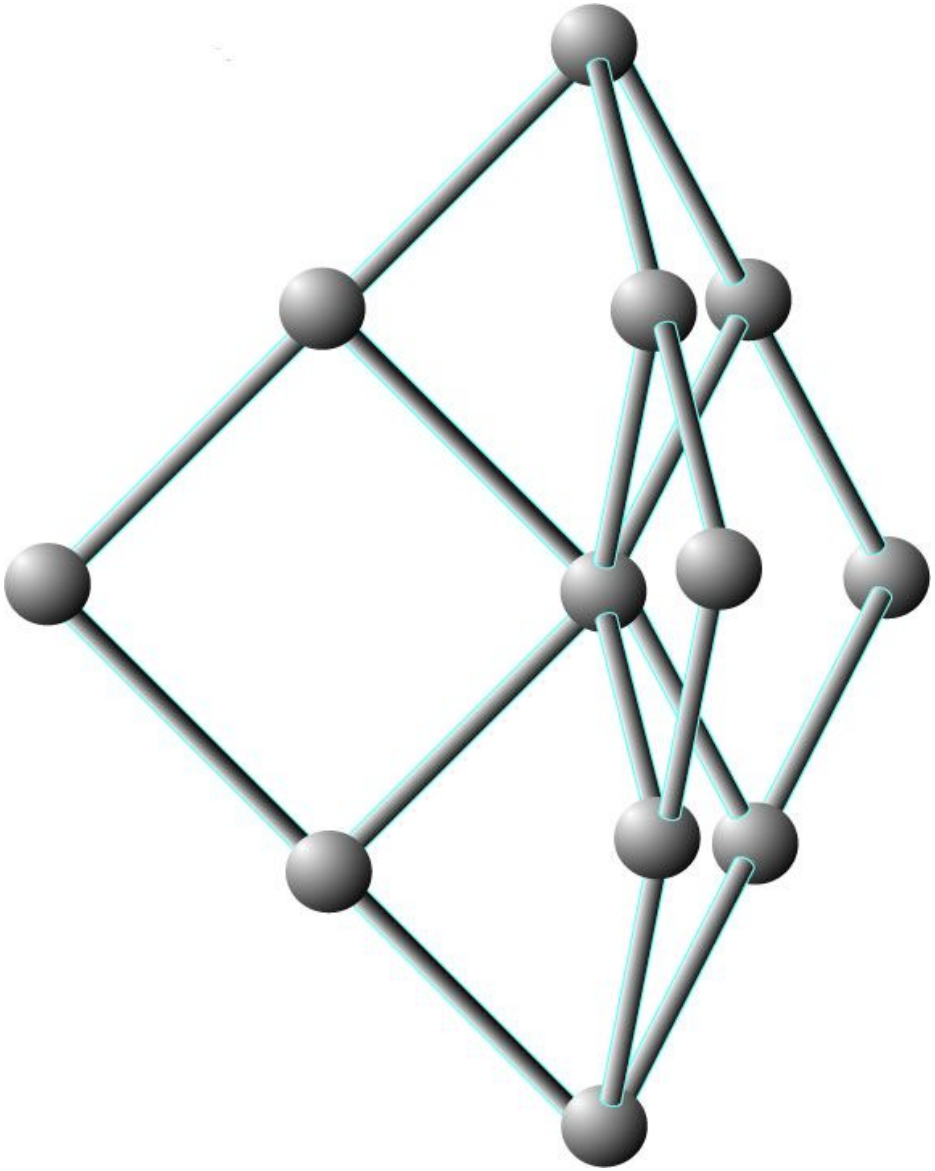
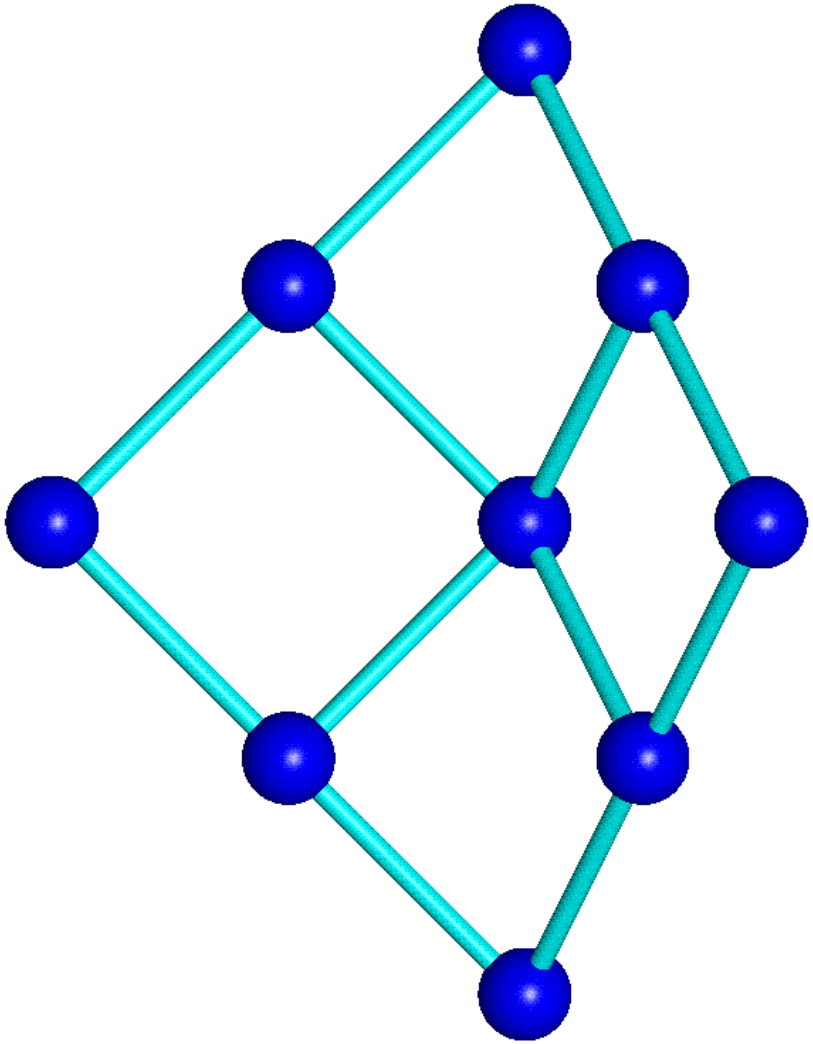
Huhn András (1947-1985)

ÉS VÉGÜL A MEGOLDÁS

A problémát 60 év után oldották meg !

Fridrich Wehrung, 2005.

- **Tétel**. *Létezik olyan disztributív algebrai háló, amelyik nem izomorf valamely háló kongruenciahálójához.*
  Ennek $\aleph_{\omega+1}$ *kompakt eleme van.*

Pavel Růzička, 2006.

- **Tétel.** *Létezik egy $\aleph_2$ számosságú disztributív félháló, amelyik nem izomorf valamely háló kompakt kongruenciáinak félhálójához.*