*Alkalmazott Matematikai Lapok* **8** (1982) 177—182

# MEGJEGYZÉSEK A RELÁCIÓS ADATBÁZIS MODELLEKBEN ÉRTELMEZETT FÜGGŐSÉGI RELÁCIÓKHOZ

SCHMIDT E. TAMÁS

Budapest

Az E. F. CODD által bevezetett funkcionális függőséggel az utóbbi időben több hazai szerző is foglalkozott (lásd pl. BÉKÉSSY ANDRÁS—DEMETROVICS JÁNOS [1], CZÉDLI GÁBOR [2, 3], DEMETROVICS JÁNOS [4, 5]). Több figyelemre méltó új eredmény mellett a témakör összesítését nyújtja DEMETROVICS JÁNOS cikke. Ez utóbbi keltette fel érdeklődésemet és arra sarkallt, hogy néhány általánosítási lehetőségre rámutassak. Remélhetőleg e megjegyzéseim az alkalmazások szempontjából sem lesznek érdektelenek. Mindenekelőtt egy célszerű segédeszköz bevezetésével kezdem, ez az ún. lezárási operátor.

## 1. Lezárási operátorokról általában

Legyen $\Omega$ egy tetszőleges véges halmaz, az ún. attributum halmaz. Ennek bizonyos részhalmazából álló rendszert röviden halmazrendszernek szokás nevezni. Ezek közül az egyik legfontosabb, amely $\Omega$ összes részhalmazát tartalmazza, neve hatványhalmaz és leggyakoribb jelölése $P(\Omega)$. Ezen két kétváltozós műveletet a halmazelméleti metszetet, $X \cap Y$ és egyesítést $X \cup Y$, továbbá egy egyváltozós műveletet a komplementumképzést, $X'$ szokás értelmezni. Ezekre nézve $P(\Omega)$ egy algebrai struktúra, ún. *Boole-algebra.*

A halmazrendszerek között fontosak azok az $F$ halmazrendszerek, amelyek egyrészt tartalmazzák $\Omega$-t és zártak a halmazelméleti metszésre nézve, azaz ha $X$, $Y \in F$, úgy $X \cap Y \in F$. (Ha $\Omega$ végtelen, úgy megköveteljük, hogy tetszőleges sok $F$-beli $X_i$ részhalmaz metszete, $\bigcap X_i$ is legyen $F$-ben.) Ezen tulajdonsággal rendelkező halmazrendszereket *lezárási rendszernek* nevezzük. Ha $X$ az $\Omega$ egy tetszőleges részhalmaza és $F$ egy lezárási rendszer $\Omega$-án, úgy tekinthetjük mindazon $Y_i \in F$ halmazokat, amelyekre $X \subseteq Y_i$. Mivel $F$ a metszésre nézve zárt, ezek metszete $\overline{X} = \bigcap Y_i$ ugyancsak eleme $F$-nek és tartalmazza $X$-et. $\overline{X}$ nyilván a legszűkebb ilyen tulajdonságú részhalmaz és az $X$ által egyértelműen meghatározott. Az $X \to \overline{X}$ megfeleltetés tekinthető tehát egy operátornak, amely az $X \subseteq \Omega$-hoz az $\Omega$-nak egy $\overline{X}$ részhalmazát rendeli hozzá, azaz $X \to \overline{X}$ a $P(\Omega)$-n egy művelet. Ez a hozzárendelés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $X \subseteq \overline{X}$ (extenzív),
(ii) ha $X \subseteq Y$ úgy $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (monoton),
(iii) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ (idempotens).

Megfordítva, tegyük fel, hogy van egy $X \to \overline{X}$ operátorunk, amely az $\Omega$ $X$ részhalmazához az $\overline{X}$ részhalmazt rendeli hozzá oly módon, hogy a fenti (i)—(iii) tulajdonságok teljesülnek. Állítjuk, hogy ekkor ez az operátor meghatároz egy

$F$ lezárási rendszert, amelyhez a fenti módon rendelt lezárási operátor az adott operátor. Álljon $F$ mindazon $X$ részhalmazokból, amelyekre $\overline{X}=X$, ezek az ún. zárt halmazok. Belátjuk, hogy ez lezárási rendszer. (i) miatt $\Omega\subseteq\overline{\Omega}$, azaz $\overline{\Omega}=\Omega$ és így $\Omega\in F$. Legyenek $X_i\in F$, azaz $\overline{X}_i=X_i$. Ekkor $\cap X_i$-re a következőt kapjuk. Egyrészt az (ii) tulajdonság miatt $\cap X_i\subseteq\overline{\cap X_i}$. Másrészt nyilván $\cap X_i\subseteq X_i$, így (ii) alapján $\overline{\cap X_i}\subseteq\overline{X}_i=X_i$ (ez utóbbi az $X_i\in F$ feltevés miatt). Ez teljesül minden $i$-re, azaz $\overline{\cap X_i}\subseteq\cap X_i$. A két tartalmazás összetevéséből adódik $\overline{\cap X_i}=\cap X_i$, azaz $\cap X_i\in F$.

Legyen $F$ egy lezárási rendszer. Ennek elemei (tehát a zárt részhalmazok) a halmazelméleti tartalmazásra nézve egy részben rendezett halmazt alkotnak. Ha $A, B\in F$, úgy $A\cap B$ eleme $F$-nek, ami azt jelenti, hogy ezen részben rendezett halmazban bármely két elemnek létezik legnagyobb alsó korlátja, azaz infimuma, (az $A$ és $B$ infimuma $A\cap B$). Állítjuk, hogy bármely két elemének, $A$-nak és $B$-nek létezik legkisebb felső korlátja (ún. supremuma) is. (Ez általában nem egyezik meg $A\cup B$-vel. Álljon $F$ a sík konvex részhalmazából, akkor $A\cup B$ nyilván nem szükségképp konvex.) Könnyű látni, hogy $A\cup B$ lezártja, azaz $\overline{A\cup B}$ nem más, mint az $A$ és $B$ supremuma, amit az $\cup$-től való megkülönböztetés érdekében $A\vee B$-vel jelölünk. Azt kaptuk, hogy $F$ egy olyan részben rendezett halmaz, amely bármely két elemének létezik infimuma és supremuma. Az ilyen részben rendezett halmazt *hálónak* nevezik. Könnyű kimutatni, hogy minden véges háló egy alkalmas $\Omega$ halmazon értelmezett lezárási rendszer: legyen $L$ egy háló, minden $a$ eleméhez rendeljük hozzá $L$-nek azt az $(a]$ részhalmazát, amely az $a$-nál kisebb vagy egyenlő elemekből áll (ún. főideál). Ezek egy lezárási rendszert alkotnak.

Speciális lezárási rendszer, amely zárt az egyesítésre nézve, az ilyet topologikus lezárási rendszernek nevezzük. Ezek a legkönnyebben kezelhetők és azzal jellemezhetők, hogy eleget tesznek az ún. disztributivitásnak, azaz

$$A\vee(B\cap C)=(A\vee B)\cap(A\vee C).$$

## 2. Relációk által indukált lezárási operátorok

Induljunk ki ismét az $\Omega$ halmazból, amelynek elemeit célszerű az $1, 2, \ldots, n$ számokkal jelölni. Ennek az az előnye, hogy ily módon az $\Omega$ elemeit rendezettnek tekinthetjük. Tegyük fel, hogy minden $i\in\Omega$-hoz hozzá rendelve egy $T_i$ halmaz és képezzük ezek ún. *Descartes-szorzatát,* $\Pi T_i=T_1\times T_2\times\ldots\times T_n$-et, ami azon $(a_1, \ldots, a_n)$ elem $n$-esek (vektorok) halmaza, amelyekre $a_i\in T_i$. $\Omega$-feletti relációk a $\Pi T_i$ részhalmazai. Egy $R\subseteq\Pi T_i$ $\Omega$ feletti reláció tehát bizonyos $(a_1, \ldots, a_n)$ vektorok halmaza. (Szokás e vektorokat mint függvényeket felfogni, értelmezési tartomány $\Omega$, és $i\in\Omega$ helyen a függvény értéke $a_i$.) Egy adott $R$ relációhoz többféleképpen rendelhetünk hozzá $\Omega$-n lezárási operátort. Ezek közül kétségkívül az egyik legegyszerűbb az E. F. Codd által bevezetett ún. *funkcionális függés* (lásd [5], 5. old.), amelyet itt rögtön a lezárási operátor fogalmával adunk meg.

1. Definíció. Ha $A\subseteq\Omega$, úgy $\overline{A}=\{x\in\Omega;\ (\forall f, g\in R)((\forall a\in A)\ (h(a)=g(a)))\Rightarrow\Rightarrow(h(x)=g(x))\}$.

Szóban: Ha $f$ és $g$ az $R$-nek mindazon elempárjain végigfut, amelyek az $A$-n megegyeznek, úgy az $\overline{A}$ a legnagyobb olyan halmaz, amelyen ezen $f, g$ párok megegyeznek.

Nyilvánvaló, hogy az $A \to \bar{A}$ megfeleltetés rendelkezik a (i)—(iii) tulajdonságokkal, azaz lezárási operátor.

Első kézenfekvő kérdés, hogy rendelkezik-e ez az operátor valamilyen speciális tulajdonsággal? A válasz nemleges. Legyen ugyanis $F$ egy tetszőleges lezárási rendszer $\Omega$-n. Feltehetjük, hogy minden $T_i$ kételemű, és elemeit jelölje 0, ill. 1. (Pontosabban $0_i$, ill. $1_i$-vel kellene jelölnünk, de az hogy ezek a vektorban hányadik helyen — ti. az $i$-edik helyen — állnak megadja, hogy mely $T_i$-hez tartoznak.) A $\Pi T_i$ szorzat tehát 0, ill. 1-et tartalmazó $n$-esek összessége. Ha $A \in F$, úgy vegyük ennek úgynevezett karakterisztikus függvényét, $h(A)=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$-t, ahol $a_i=1$, ha $i \in A$ és $a_i=0$, ha $i \notin A$. Álljon az $R$ reláció az összes $A \in F$-hez tartozó $h(A)$ karakterisztikus függvényekből és az azonosan 1 vektorból, $((1, 1, \ldots, 1))$. Ezen relációhoz tartozó lezárási operátornál a zárt halmazok éppen az $F$ halmazrendszer elemei lesznek.

1. ÁLLÍTÁS. Bármely $F$ véges hálóhoz található olyan $n$ természetes szám és $R \subseteq 2^n$ reláció, hogy az $R$ által indukált lezárási rendszer éppen $F$.

A fentiekben tehát egy módszert adtunk meg arra, hogyan lehet adott lezárási rendszerhez olyan $R$ $\Omega$-feletti relációt találni, amelyhez a *Codd-féle függőségi reláció* épp az adott lezárási rendszert rendeli hozzá. Természetesen a $T_i$ halmazok tetszőlegesen változtathatók és ez alkalmazásoknál néha célszerű is.

Néhány további megjegyzést teszünk a függőségi relációval kapcsolatban. Egy $A \to \bar{A}$ lezárási operátort nyilván jellemezhetünk azáltal is, hogy megmondjuk mely $(A, B)$ párokra lesz $B \subseteq \bar{A}$. Ezen $(A, B)$ halmazpárokat azután jellemezhetjük axiomatikusan. Egy ilyen jellemzést ad meg W. W. ARMSTRONG, amelyet *$\varphi$-axiómarendszernek* nevezzük:

2. DEFINÍCIÓ: Az $F'$ halmazrendszer akkor elégíti ki a $\varphi$-axiómarendszert, ha a következők teljesülnek:

(F1) $(A, A) \in F'$,

(F2) ha $(A, B) \in F'$, $(B, C) \in F'$, úgy $(A, C) \in F'$,

(F3) ha $(A, B) \in F'$, $C \supseteq A$, $D \subseteq B$, akkor $(C, D) \in F'$,

(F4) ha $(A, B) \in F'$ és $(C, D) \in F'$, úgy $(A \cup C, B \cup D) \in F'$.

2. ÁLLÍTÁS. Legyen $A \to \bar{A}$ egy egyváltozós függvény $P(\Omega)$-n és legyen $F'$ mindazon $(A, B)$ párok összessége, amelyre $B \subseteq \bar{A}$. Ekkor $A \to \bar{A}$ pontosan akkor lezárási operátor, ha $F'$ eleget tesz az (F1)—(F4) axiómáknak.

Az állítás igen egyszerűen igazolható:

Legyen ugyanis $A \to \bar{A}$ egy tetszőleges lezárási operátor $\Omega$-n, és jelölje $F'$ mindazon $(A, B)$ párok összességét, amelyekre $B \subseteq \bar{A}$. Ekkor (i) miatt $(A, A) \in F'$, tehát teljesül (F1). Ha $(A, B), (B, C) \in F'$, azaz $B \subseteq \bar{A}$ és $C \subseteq \bar{B}$, (ii) és (iii) felhasználásával kapjuk, hogy $C \subseteq \bar{B} \subseteq \bar{\bar{A}} = \bar{A}$, azaz $(A, C) \in F'$, miként azt (F2) állítja. Legyen $(A, B) \in F'$ és $C \supseteq A$, $D \subseteq B$. Ekkor (ii) miatt $C \supseteq A$-ból $\bar{C} \supseteq \bar{A}$ adódik, tehát $D \subseteq B$ figyelembevételével egyben $D \subseteq \bar{A}$ és $\bar{A} \subseteq \bar{C}$, így $D \subseteq \bar{C}$, azaz $(C, D) \in F'$; teljesül (F3) is. Végül (F4)-et igazolandó legyen $(A, B) \in F'$, $(C, D) \in F'$, azaz $B \subseteq \bar{A}$ és $D \subseteq \bar{C}$. Ekkor $B \subseteq \bar{A} \subseteq \overline{A \cup C}$ az (ii) miatt. Hasonlóan $D \subseteq \overline{A \cup C}$,

azaz $B\cup D\subseteq\overline{A\cup C}$, ami ekvivalens az $(A\cup C, B\cup D)\in F'$ állítással. Megfordítva, tegyük fel, hogy valamely —: $P(\Omega)\to P(\Omega)$ operátorra az $F'=\{(A,B)|B\subseteq\bar{A}\}$ $\varphi$-rendszer. Mivel (F1) szerint $(A,A)\in F'$, definíció szerint $A\subseteq\bar{A}$, azaz (i) teljesül.

Ha $A\subseteq B$, $(A,\bar{A})\in F'$, így (F3) miatt $(B,\bar{A})\in F'$, amit $\bar{B}$ definíciójával egybevetve kapjuk, hogy $\bar{A}\subseteq\bar{B}$, tehát teljesül (ii). Végül (iii) az (F2) átfogalmazása. Ezzel igazoltuk *Armstrong tételét*.

Relációk egyenlőséghalmazát gyakran használjuk algebrai vizsgálatokban (pl. *Boole-hatvány*) és ugyancsak előfordul DEMETROVICS JÁNOS értekezésében is. Ennek értelmezése a következő: ha $h, g\in R$, úgy

$$E(h,g)=\{i\in\Omega;\ h(i)=g(i)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az egyenlőséghalmazok zárt halmazok az $R$ által indukált lezárási operátornál, azaz a funkcionális függőségnél. A megfordítás azonban nem igaz, nem minden zárt halmaz egyenlőséghalmaz, amit a következő példa mutat: $\Omega=3$ és $R$ elemei $h_1=(1,1,1)$, $h_2=(1,1,0)$, $h_3=(1,0,0)$, $h_4=(0,0,0)$, ekkor $E(h_1,h_2)=\{1,2\}$, $E(h_3,h_4)=\{2,3\}$, így $E(h_1,h_2)\cap E(h_3,h_4)=\{2\}$ zárt, de ez nem egyenlőséghalmaz. Természetesen az $R$ bővíthető úgy, hogy minden zárt halmaz egyenlőséghalmaz legyen, ha valamely $A$ zárt halmazhoz definiálunk két $h, g$ vektort, amelyek pontosan az $A$-n egyeznek meg.

Térjünk vissza funkcionális függés definíciójára (1. definíció), akkor láthatjuk, hogy

$A\subseteq\Omega$ pontosan akkor zárt, ha $\forall x\notin A$-hoz létezik olyan $h_x, g_x\in R$, amelyekre $h_x(x)\neq g_x(x)$, de $h_x(a)=g_x(a)$ $\forall a\in A$-ra.

Ebből nyilvánvaló, hogy $x\notin E(h_x,g_x)$ és $A\subseteq E(h_x,g_x)$, tehát $E(h_x,g_x)$ „szeparálja" $A$-t és $x$-et. Ezzel bizonyítottuk a következő állítást:

3. ÁLLÍTÁS. Minden $A$ zárt halmaz előállítható $A=\bigcap_{x\notin A} E(h_x,g_x)$ alakban, azaz az egyenlőséghalmazok a metszet művelettel generálják az összes zárt halmazt.

Tekintettel arra, hogy az $E(h_x,g_x)$ halmazok maguk is zártak, kapjuk a következőt:

4. ÁLLÍTÁS. Ha $A$ metszet — irreducibilis zárt halmaz (azaz nem állítható elő két tőle különböző zárt halmaz metszeteként), úgy $A$ egyenlőség-halmaz, azaz léteznek olyan $f, g\in R$ vektorok, amelyekre $A=E(f,g)$.

Legyen $F$ az $\Omega$-án értelmezett lezárási rendszer. Mint láttuk, az egy háló.

5. ÁLLÍTÁS. Tetszőleges $E$ halmazrendszerre, melyre $\emptyset\in E\subseteq P(\Omega)$ létezik olyan $R$ $\Omega$-feletti reláció, hogy az egyenlőséghalmazok pontosan az $E$ elemei.

*Bizonyítás.* Egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy minden $T_i$ $2k$-elemű, $T_i=\{1,2,\ldots,2k\}$, ahol $k$ az $E$ elemeinek a száma. Indexeljük meg az $E$ elemeit: $A_1,\ldots,A_k$. Legyen $g_j\in\Pi T_i$ az azonosan $j$ függvény. Legyen $g_{A_j}=(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ a következő: $a_i=j$, ha $i\notin A_j$ és $a_i=j+k$, ha $i\notin A_j$. Így $E(g_j,g_{A_j})=A_j$ és $E(g_{A_i},g_{A_j})=\emptyset$, ha $i\neq j$.

[5] alapján egy $\mathscr{A}$ halmazrendszert $\Delta$-rendszernek nevezzük, ha bármely $A, B, C, D\in\mathscr{A}$, $A\neq B$, $C\neq D$ esetén $A\cap B=C\cap D$. Ennek megfelelően egy háromelemű halmazrendszer $\{A,B,C\}$ $\Delta$-rendszer, ha $A\cap B=A\cap C=B\cap C$. Ilyen például az $\{E(h,g), E(h,f), E(g,f)\}$ rendszer ([5], 2.2. tétel). Legyen $E$ egy lezárási rendszer,

amely legnagyobb elemét jelölje $I$. Belátjuk, hogy ekkor $E$ elemét elláthatjuk kettős indexekkel $E_{i,j}$ $1 \leqq i < j \leqq k$ úgy, hogy minden $1 \leqq i < j < l \leqq k$ indexekre $\{E_{ij}, E_{il}, E_{jl}\}$ $\Delta$-rendszer. Számozzuk meg az $E$ elemeit úgy, hogy $I$ mellé 1-et írunk és a többi elem $2, 3, \ldots, n$. Az $i \wedge j$ elemet jelölje $E_{ij}$ $(i \neq j)$.

Így minden az $I$-től különböző elemhez hozzárendelhetünk legalább egy $E_{ij}$ jelet, ahol $1 \leqq i < j \leqq n$. Legyen $i < j < 1$, ekkor $E_{i,j} \wedge E_{i,l} = (i \wedge j) \wedge (i \wedge l) = i \wedge (j \wedge l) \leqq$ $\leqq E_{j,l}$, azaz $\Delta$-rendszer.

*Megjegyzés.* Az $F$ lezárási rendszer elemei, tehát az $\bar{A}$ alakú halmazok pontosan azok, amelyekre — [5] terminológiáját használva — $(A, \bar{A})$ maximális függése az $F$ rendszernek. A maximális jobb oldalak $I(F)$ halmaza pontosan az $F$. Az $A$ halmaz az $F$ kulcsa azt jelenti, hogy $\bar{A} = \Omega$.

Különösen szemléletes az egyenlőséghalmaz, ha a $T_i$ halmazok valamennyien kételeműek. Ekkor tehát a 0, 1-esekből álló elem $n$-eseket tekintjük, amelyek száma $2^n$, és egy *Boole-algebrát* alkotnak. Az $\Omega$ $i$ elemét azonosíthatjuk azzal az elem $n$-essel, amelyben csak az $i$-edik helyen áll 1. Legyen $g, h \in 2^n$, ekkor

$$E(g, h) = (g \wedge h) \vee (g' \wedge h'),$$

ahol $\wedge$, $\vee$ a *Boole-algebra* műveletei (pl. $n=3$, $g=(1, 1, 0)$, $h=(0, 1, 1)$). Így $g'=(0, 0, 1)$, $h'=(1, 0, 0)$ és $E(g, h)=(0, 1, 0) \vee (0, 0, 0)=(0, 1, 0)$. Speciálisan, ha $g=h$, úgy $E(g, g)=(g \wedge g) \vee (g' \wedge g')=g \vee g'=\Omega$.

CZÉDLI GÁBOR [3] dolgozatában vezette be a $d$-függést: $A \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} B$ akkor és csakis akkor, ha minden $f, h \in R$-re

$$(\exists a \in A)(g(a) = h(a)) \Rightarrow (\exists b \in B)(g(b) = h(b)).$$

Tekinthetjük ismét azon $(A, B)$ párokat, amelyekre $B \overset{d}{\underset{R}{\rightarrow}} A$. Mint azt CZÉDLI kimutatta, e párok ugyanazokkal az axiómákkal jellemezhetők, mint a funkcionális függés eset, kiegészítve azzal, hogy $(\emptyset, A)$ esetén $A=\emptyset$, azaz, hogy $\bar{\emptyset}=\emptyset$. Így ez a függés is tárgyalható a lezárási operátor segítségével.

## 3. Általános funkcionális függés

Az előbbiekben halmazok $T_1 \times \ldots \times T_n$ *Descartes-szorzatát* képeztük és a funkcionális függés megállapításánál azt vizsgáltuk, hogy $f, g \in T_1 \times \ldots \times T_n$ vektorok, mely $i$ komponenseken egyeznek meg. Itt tehát a $T_i$-n az egyenlőség relációit tekintettük és ezek határozták meg az $R \subseteq T_i \times \ldots \times T_n$ relációval együtt az $A \rightarrow \bar{A}$ lezárási operátort. Nos, az általánosítás kézenfekvő: tekintsünk a $T_i$-halmazokon tetszőleges $\varrho_i$ binér relációkat. Pl. $\varrho_i$ lehet a rendezés, ekvivalencia stb. Így kapjuk a következőt:

3. DEFINÍCIÓ. Legyen minden $1 \leqq i \leqq n$-re $\varrho_i$ valamely a $T_i$ halmazon értelmezett binér reláció. Legyen továbbá $R \subseteq \Pi T_i$ egy reláció $\Omega$ felett. Ha $A \subseteq$ $\subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, úgy legyen

$$\bar{A} = \{i;\ i \leqq n,\ (f, g \in R)((\forall j \in A;\ h(j) \varrho_j g(j)) \Rightarrow h(i) \varrho_i g(i))\}.$$

Amennyiben a $\varrho_i$-k ekvivalenciarelációk, úgy képezhetjük a $T_i/\varrho_i$ faktorhalmazokat, illetve értelmezhetünk $\Pi T_i$-n egy ekvivalenciarelációt:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)\varrho(b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n)$$

akkor és csakis akkor, ha $a_i \varrho_i n_i$ minden $i$-re.

Ekkor $\Pi T_i/\varrho_i$ megegyezik a $\Pi T_i/\varrho$ faktorhalmazzal, pontosabban létezik egy természetes bijekció. Mivel $R$ a $\Pi T_i$ részhalmaza, tehát képezhető $R/\varrho$ is. Nyilvánvaló, hogy az $R$ által indukált lezárási rendszer megegyezik az $R/\varrho$ által indukálttal.

Gyakorlati alkalmazások szempontjából érdekesnek tűnik, ha a $\varrho_i$ relációk rendezési relációk vagyis, ha a $T_i$ halmazok részben rendezett halmazok.

Más lehetőség, ha az egyes $T_i$-k algebrai struktúrák, vagy parciális struktúrák, ekkor olyan $\varrho_i$ relációkat tekinthetünk, amelyek a műveletekkel kompatibilisek, tehát ha $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ egy művelet $T_i$-n és $x_1\varrho_i y_1, x_2\varrho_i y_2, \ldots$, akkor egyszersmind $f(x_1, \ldots, x_k)\varrho_i f(y_1, \ldots, y_k)$.

## IRODALOM

[1] BÉKÉSSY, A. and DEMETROVICS, J., "Contribution to the theory of data base relation", *Discrete Math.* **27** (1979) 1—10.
[2] CZÉDLI, G., „Függőségek relációs adatbázis modellben", *Alk. Mat. Lapok* **6** (1980).
[3] CZÉDLI, G., "*d*-dependency structures in the relational model of data", *Acta Cybernetica* **5** (1980) 49—57.
[4] DEMETROVICS, J., „Relációs adatbázis modell", *MTA SZTAKI Közlemények* **20** (1980) 21—33.
[5] DEMETROVICS, J., Relációs adatmodell logikai és strukturális vizsgálata, Doktori értekezés, 1980.

(Beérkezett: 1981. november 26.)

SCHMIDT E. TAMÁS
MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET
1053 BUDAPEST, REÁLTANODA U. 13—15.

## REMARKS ON DEPENDENCE RELATIONS IN RELATIONAL DATABASE MODELS

E. T. SCHMIDT

Nowadays many authors in Hungary (A. BÉKÉSSY and J. DEMETROVICS [1], G. CZÉDLI [2, 3], J. DEMETROVICS [4, 5]) deal with the functional dependence introduced by E. F. CODD. The paper by J. DEMETROVICS in addition to many new remarkable results gives the summary of the theme. I was stimulated by this paper to show some possibilities of the generalizations. I hope my remarks shall have some importance in point of view of the applications, too.



82-1100 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató