Periodica Mathematica Hungarica Vol. 1 (1), (1971), pp. 45—53.

UNABHÄNGIGKEITSRELATIONEN IN HALBVERBÄNDEN

von

E. T. SCHMIDT (Budapest)

Dem Andenken meines verehrten Lehrers Prof. A. RÉNYI *gewidmet*

1. Einleitung

In der modernen Algebra sind verschiedene Unabhängigkeitsbegriffe bekannt. Diese Begriffe führen immer zur gewissen Unabhängigkeitsrelationen, die in Halbverbänden (Vereinigungshalbverbänden) definiert sind. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine ganz allgemeine Unabhängigkeitsrelation für Halbverbände zu definieren, die eine gemeinsame Verallgemeinerung der folgenden Unabhängigkeitsrelationen ist:

(A) Die Definition des direkten Produktes von Gruppen führt zu einer noch allgemeineren Begriffsbildung in modularen Verbänden, nämlich zur direkten Vereinigung. Die Komponente der direkten Vereinigung bilden eine unabhängige Teilmenge des Verbandes, die wie folgt definiert ist: Gegeben sei ein modularer Verband L mit Nullelement. Wir sagen, daß zwischen den Elementen $a, b \in L$ die Relation $\perp_0$ besteht, wenn $a \cap b = 0$, $a, b \neq 0$ gilt. Eine Teilmenge A von L nennt man $\perp_0$-unabhängig, falls für je zwei endliche, elementenfremde Teilmengen A_1 und A_2 von A $\bigcup A_1 \perp_0 \bigcup A_2$ gilt. ($\bigcup A$ bedeutet die Vereinigung aller Elemente von A.) Diese Unabhängigkeit ist durch die Relation $\perp_0$ induziert.

(B) Ein anderer Unabhängigkeitsbegriff entsteht, wenn wir die von E. MARCZEWSKI [5] eingeführte Unabhängigkeit für Halbverbände spezialisieren (siehe G. SZÁSZ [7]). aMb soll bedeuten, dass a und b unvergleichbare Elemente sind. Eine Teilmenge A von L wollen wir M-unabhängig nennen, wenn für je zwei endliche, elementenfremde Teilmengen A_1 und A_2 von A $\bigcup A_1 M \bigcup A_2$ gilt.

(C) Die dritte Unabhängigkeitsrelation können wir durch eine Verallgemeinerung der linearen Unabhängigkeit gewinnen. (Siehe A. KERTÉSZ [3]). Es sei S eine nichtleere Menge und $x\delta A$ eine Relation zwischen Elementen x und Teilmengen A von S. δ heißt eine Abhängigkeitsrelation, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) ist $x \in A$, so gilt $x\delta A$;

(2) gilt für das Paar x, A, $x\delta A$ aber $x\bar{\delta}(A \setminus a)$ $(a \in A)$, so ist $a\delta(A \setminus x) \cup x$;

(3) ist für $x \in S$ und $A, B \subseteq S$ $x\delta A$ und gilt $a\delta B$ für jedes $a \in A$, so ist $x\delta B$;

(4) ist $x\delta A$, so gibt es eine endliche Teilmenge $A' \subseteq A$, so daß $x\delta A'$ gilt.

Die Teilmenge A von S heißt δ-unabhängig, wenn für jedes $a \in A$ $a\bar{\delta}(A \setminus a)$ gilt. Es sei $B^*(S)$ der Halbverband (Verband) aller endlichen Teilmengen von S. Wir können hier die Unabhängigkeit für beliebige Teilmengen von S erklären $A \perp B$ $(A, B \subseteq S)$ soll heißen, daß A und B elementfremd sind und $A \cup B$ eine δ-unabhängige Teilmenge vom S ist. Die unabhängige Teilmengen sind mit Hilfe einer Abhängigkeitsrelation definiert.

(D) Es sei L ein modularer Verband und I ein Ideal von L. Wenn I der Kern eines Homomorphismus ist, so definiert I die folgende Relation $\perp_I$ (siehe [6]):

$a \perp_I b$ $(a, b \in L)$ dann und nur dann, wenn aMb und $a \cap b \in I$ gilt. Die $\perp_I$-unabhängige Teilmengen sind genauso definiert wie bei $\perp_0$.

(E) Von den wichtigsten Eigenschaften der Relation $\perp_0$ ausgehend, hat S. Maeda [4] eine allgemeine Unabhängigkeitsrelation eingeführt. Es sei L ein Verband. Eine in L definierte binäre Relation $\perp$ heißt eine Unabhängigkeitsrelation (im Sinne von Maeda), wenn sie der folgenden Axiomen genügt:

($\perp$ 1') aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$;

($\perp$ 2') wenn $a \perp b$, $a_1 \leq a$, so folgt[1] $a_1 \perp b$;

($\perp$ 3') aus $a \perp b$, $a \cup b \perp c$ folgt stets $a \perp b \cup c$;

Ist L ein modularer Verband, so genügt die Relation $\perp_0$ dieser Axiomen. Die Relationen M und $\perp_I$ genügen aber weder ($\perp$ 2) noch ($\perp$ 3). Wir wollen diese Axiomen so modifizieren, daß sie auch für die Relationen M, $\perp_I$ gültig seien.

1. Eine neue Unabhängigkeitsrelation

Definition 1. Eine in dem Halbverband L definierte binäre Relation $\perp$ heißt eine *Unabhängigkeitsrelation*, wenn sie der folgenden Axiomen genügt:

($\perp$ 0) aus $a \perp b$ folgt aMb;

($\perp$ 1) aus $a \perp b$ folgt $b \perp a$;

($\perp$ 2) ist $a \perp b$, $a_1 \leq a$, $a_1 Mb$ und $a, a_1, b \in L$, so gilt $a_1 \perp b$;

($\perp$ 3) ist $\{a, b, c\}$ eine M-unabhängige Teilmenge und gilt $a \perp b$, $a \cup b \perp c$, so folgt stets $a \perp b \cup c$.

Die $\perp$-unabhängige Teilmengen von L sind genauso definiert wie im Falle der Relation $\perp_0$.

[1] Bei Maeda ist $a_1 \neq 0$ nicht vorausgesetzt.

Offensichtlich genügt M dieser Axiomen. Ist L ein modularer Verband (Halbverband) so besitzt die Relation $\perp_I$ diese Eigenschaften ($\perp$ 0) — ($\perp$ 3). Hat L ein Nullelement 0, so betrachten wir das Nullideal (0]. Die entsprechende Relation $\perp_{(0]} = \perp_0$ ist also eine Unabhängigkeitsrelation.

Spezielle Unabhängigkeitsrelationen können wir mit Hilfe gewisser Homomorphismen (Kongruenzen) des Halbverbandes definieren. Dazu benötigen wir erst einige Vorbereitungen.

Es sei L ein Halbverband und $\varphi : L \to L'$ $(a \to a')$ ein Homomorphismus von L auf L'. Mit $(a]$ bezeichnen wir das durch $a \in L$ erzeugte Hauptideal. Wenn L ein Nullelement besitzt, so bilden seine Ideale einen Verband, d. h. $(a] \cap (b]$ ist ein Ideal.

Definition 2. Der Homomorphismus von L auf L' heißt ein U-Homomorphismus (Unabhängigkeitshomomorphismus), wenn L' ein Nullelement besitzt und L' die folgende Eigenschaft besitzt:

(1) ist $(a] \cap (b] = 0$, $(a \cup b] \cap (c] = 0$ so gilt $(a] \cap (b \cup c] = 0$.

Dementsprechend wollen wir die Kongruenz Θ von L eine U-Kongruenz nennen, wenn der induzierte Homomorphismus $\varphi : L \to L/\Theta$ ein U-Homomorphismus ist.

Der U-Homomorphismus $\varphi : L \to L'$ definiert dann in L zwei binäre Relationen $\perp_\varphi$ und δ_φ:

(i) $a \perp_\varphi b$ $(a, b \in S)$ soll genau dann gelten, wenn aMb und $(a'] \cap (b'] = 0$ gilt,

(ii) $a \,\delta\, b$ $(a, b \in L)$ gilt dann und nur dann, wenn $a' \leq b'$ ist.

Aussage 1. *Die Relation $\perp_\varphi$ ist eine Unabhängigkeitsrelation.*

Beweis. Die Axiomen ($\perp$ 0), ($\perp$ 1) und ($\perp$ 2) sind offensichtlich erfüllt. Wir zeigen, daß $\perp_\varphi$ auch ($\perp$ 3) genügt. Es sei $a \perp_\varphi b$, $a \cup b \perp_\varphi c$ und $aMb \cup c$.

Es gilt dann $(a'] \cap (b'] = 0$ und $(a' \cup b'] \cap (c'] = 0$. Daraus folgt nach (1) $(a'] \cap (b' \cup c'] = 0$. Wegen $aMb \cup c$ ist dann $a \perp_\varphi b \cup c$.

Die Relation δ_φ nennen wir eine Abhängigkeitsrelation.

Jedes Ideal I des Halbverbandes L definiert eine Kongruenz $\Theta_I : x \equiv y(\Theta_I)$, $x \leq y$ dann und nur dann, wenn ein $t \in I$ derart existiert, daß $y = x \cup t$ gilt. Ist der Faktorhalbverband L/Θ_I modular, so ist Θ_I in bezug auf L eine U-Kongruenz. (Wenn L selbst modular ist, so gilt dasselbe auch für L/Θ_I.) Die entsprechende Unabhängigkeitsrelation bezeichnen wir einfach mit $\perp_I$. Es gilt also die

Aussage 2. *Ist L ein modularer Halbverband und I ein Ideal von L, so ist Θ_I in bezug auf L eine U-Kongruenz und $\perp_I$ ist eine Unabhängigkeitsrelation.*

Für gewisse Ideale I können wir die Relation $\perp_I$ noch einfacher angeben:

DEFINITION 3. Das Ideal I des Halbverbandes L heißt ein U-Ideal, wenn I die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\text{aus } (a] \cap (b] \subseteq I \text{ folgt für jedes } x \in I \quad (a \cup x] \cap (b] \subseteq I. \tag{2}$$

AUSSAGE 3. *Ist I ein U-Ideal, so gilt $a \perp_I b$ genau dann, wenn aMb und $(a] \cap (b] \subseteq I$ ist.*

BEWEIS. Es sei $L \to L'$ der durch Θ_I induzierte Homomorphismus und $(a] \cap (b] \in I$. Ist $a_1' = a'$, $b_1' = b'$, $a_1 \geq a$, $b_1 \geq b$, so existieren die Elemente t_1, t_2 in I, so daß $a_1 = a \cup t_1$ und $b_1 = b \cup t_2$ gelten. Wegen (2) folgt dann $(a_1] \cap (b_1] \in I$, d. h. $(a'] \cap (b'] = 0$.

Ist I der Kern eines Homomorphismus in einem Verband,so ist I bestimmt ein U-Ideal (siehe [6]). Damit gewinnen wir die unter (D) definierte Relation.

3. Die wichtigste Eigenschaften der Unabhängigkeitsrelationen

AUSSAGE 4. *A ist genau dann $\perp$-unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von A $\perp$-unabhängig ist.*

BEWEIS. Trivial.

AUSSAGE 5. *Eine endliche, M-unabhängige Teilmenge $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ist genau dann $\perp$-unabhängig, wenn für jedes i $(1 \leq i < n)$*

$$a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_i \perp a_{i+1} \tag{3}$$

gilt.

BEWEIS. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig. Daß sie auch hinreichend ist, werden wir durch Induktion nach k $(1 < k \leq n)$ zeigen, daß $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ $\perp$-unabhängig ist.

Für $k = 2$ folgt die Aussage, wenn wir in (3) einfach $k = i = 2$ setzen. Nehmen wir an, dass die Behauptung für $k - 1$ schon beweisen ist, d. h. $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ $\perp$-unabhängig ist. N_1 und N_2 seien zwei elementenfremde Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$. Wenn k weder in N_1 noch in N_2 vorkommt, so folgt $\bigcup_{i \in N_1} a_i \perp \bigcup_{i \in N_2} a_i$ aus der Induktionsvoraussetzung. Ist $k \in N_2$ so sei N_3 die Menge aller Elemente von N_2 außer k. Setzt man $a = \bigcup_{i \in N_1} a_i$,

$b = \bigcup_{i \in N_3} a_i$, $c = a_k$. Da S M-unabhängig ist, gilt $aMb \cup c$ und so nach ($\perp$ 3) folgt $a \perp b \cup c$, d. h. $\bigcup_{i \in N_1} a_i \perp \bigcup_{i \in N_2} a_i$. Damit ist die Aussage bewiesen.

AUSSAGE 6. *Sind S_α $\perp$-unabhängige Teilmengen von L. $\bigvee S_\alpha$ (die mengentheoretische Vereinigung) ist dann und nur dann $\perp$-unabhängig, wenn die Menge $\{\bigcup S_\alpha\}$ $\perp$-unabhängig und $\bigvee S_\alpha$ M-unabhängig ist.*

BEWEIS. Trivial.

4. Eine Charakterisierung der U-Ideale in Verbänden

Zwei Elemente a, b eines Verbandes L nennen wir perspektiv, wenn ein $c \in L$ derart existiert, daß $a \cap c = b \cap c$ und $a \cup c = b \cup c$ gilt. Sind a, b perspektiv, so schreiben wir $a \sim b$.

DEFINITION 4. Das Ideal I heißt perspektiv abgeschlossen, wenn aus $a \in I$, $a \sim b$ stets $b \in I$ folgt.

SATZ 1. *Ein Ideal I eines modularen Verbandes ist dann und nur dann ein U-Ideal, wenn I perspektiv abgeschlossen ist.*

BEWEIS. Es sei I ein U-Ideal, $a \in I$, $a \sim b$. Dann gibt es ein c mit $a \cap c = b \cap c$, $a \cup c = b \cup c$. $b \cap c$ liegt also im I, und da I ein U-Ideal ist folgt $a \cup b = (a \cup b) \cap (a \cup c) \in I$, d. h. $b \in I$. I ist perspektiv abgeschlossen.

Nehmen wir an, dass I perspektiv abgeschlossen ist und für das Paar $a, b \notin I$ $a \cap b \in I$ ist. Gäbe es ein $c \in I$, so daß $(c \cup a) \cap (c \cup b) \notin I$ wäre, so können wir $c > a \cap b$ voraussetzen. (Statt c könnte man $c^* = c \cup (a \cap b)$ nehmen.)

Es sei $c_1 = (a \cup b) \cap c \in I$. Für dieses c_1 gilt offensichtlich $c_1 \geq a \cap b$ und $(c_1 \cup a) \cap (c_1 \cup b) = \{[(a \cup b) \cap c] \cup a\} \cap \{[(a \cup b) \cap c] \cup b\} = (a \cup b) \cap \cap (a \cup c) \cap (b \cup c)$. Daraus folgt wegen $[(a \cup b) \cap (a \cup c) \cap (b \cup c)] \cup c = = a \cup b \cup c \cap [(a \cup c) \cap (b \cup c)] = (a \cup c) \cap (b \cup c) \notin I$, daß $(a \cup c_1) \cap \cap (b \cup c_1) \notin I$ ist. Wir können also voraussetzen, daß ein Tripel a, b, c derart existiert, daß $a \cap b < c < a \cup b, c \in I, a, b \notin I$ gelten. Setzen wir $e = (a \cup c) \cap \cap (b \cup c)$, $f = (a \cap c) \cup (b \cap c)$, $a' = (a \cap e) \cup f = (a \cup f) \cap e$, $b' = (b \cap e) \cup \cup f = (b \cup f) \cap e$. Es gilt dann $a' \cup c = (a \cap e) \cup f \cup c = (a \cap e) \cup c = = (a \cup c) \cap e = e$. Ähnlicherweise $b' \cup c = e$. $a' \cap c = (a \cup f) \cap e \cap c = = (a \cap c) \cup f = f$ und $b' \cap c = f$.

Wir behaupten, daß a', b', c einen fünfelementigen, nichtdistributiven Verband erzeugt. Es gelten die folgenden:

$$\begin{aligned} a' \cup b' &= [(a \cap e) \cup f] \cup [(b \cap e) \cup f] = (a \cap e) \cup (b \cap e) = \\ &= [a \cap (a \cup c) \cap (b \cup c)] \cup [b \cap (a \cup c) \cap (b \cup c)] = \\ &= [a \cap (b \cup c)] \cup [b \cap (a \cup c)] = \{[a \cap (b \cup c)] \cup b\} \cap (a \cup c) = \\ &= (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (a \cup c) = (a \cup c) \cap (b \cup c) = e. \end{aligned}$$

Ähnlicherweise gilt $a' \cap b' = f$.

Da a', b' nicht zu I gehören können (sonst wäre $e = a' \cup c \in I$) gilt $a' \sim c$ d. h. I ist nicht perspektiv abgeschlossen. Mit diesem Widerspruch ist der Satz bewiesen.

Folgerung. Ist I der Kern eines Homomorphismus, so ist I ein U-Ideal.

Beweis. Der Kern eines Homomorphismus ist offensichtlich perspektiv abgeschlossen.

Anmerkung. Es ist leicht zu zeigen, daß ein U-Ideal nicht unbedingt der Kern eines Homomorphismus sein muß (Fig. 1).

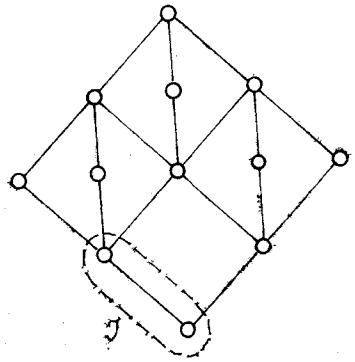

Fig. 1

5. Starke Unabhängigkeitsrelationen

Ist $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine $\perp$-unabhängige Teilmenge des Halbverbandes L und gilt $a = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$, so sagen wir, daß a die $\perp$-direkte Vereinigung der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist, in Zeichen $a = (a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n)_{\perp}$-

Ein von 0 verschiedenes Element a, das sich nicht als $\perp$-direkte Vereinigung zweier von a verschiedenen Elemente darstellen läßt, wird $\perp$-unzerlegbar genannt.

Hat das Element a des modularen Verbandes L zwei Zerlegungen

$$a = (a_1 \times \ldots \times a_n)_\perp \quad \text{und} \quad a = (b_1 \times \ldots \times b_m)_\perp$$

in $\perp$-direkte Vereinigung $\perp$-unzerlegbarer Elemente, so muß selbstverständlich n und m nicht übereinstimmen. Wir geben eine hinreichende Bedingung für $\perp$ an, daß stets $n = m$ sei.

Definition 5. Eine Unabhängigkeitsrelation $\perp$ heißt *stark*, wenn sie der folgenden Axiomen genügt:

($\perp$ 4) Gilt für die Elemente a_1, a_2, b_1, b_2, $a_1 \cup b_1 = a_1 \cup b_2 = a_2 \cup b_1 = a_2 \cup b_2$, $a_i \perp b_i$ $(i = 1, 2)$, so folgt stets $a_1 \perp b_2$;

($\perp$ 5) Ist $a \perp b$, $b < b_1$, $(a] \cap (b] = (a] \cap (b_1]$, so folgt $a \perp b_1$.

Wir wollen zeigen, daß unter einer zusätzlichen Bedingung die Relation $\perp_I$ eine starke Unabhängigkeitsrelation ist.

Satz 2. *Es sei I ein U-Ideal des Halbverbandes L. Ist L/Θ_I ein modularer Halbverband von endlicher Länge, so ist $\perp_I$ eine starke Unabhängigkeitsrelation.*

Beweis. L/Θ_I ist ein modularer Verband von endlicher Länge. Mit $l(x)$ bezeichnen wir die Dimensionsfunktion. Das Bild eines Elementes $a \in L$ bei dem Homomorphismus $L \to L/\Theta_I$ bezeichne a'.

Erst zeigen wir daß $\perp_I$ das Axiom ($\perp$ 4) genügt. Offensichtlich gilt $a_1 M b_2$. Wir müssen nur $a_1 \cap b_2 \in I$ zeigen. (Statt $(a] \cap (b]$ schreiben wir einfach $a \cap b$.)

Mit der Dimensionsfunktion gewinnen wir

$$l(a_1') + l(b_2') = l((a_1 \cap b_2)') + l(a_1' \cup b_2') = l((a_1 \cap b_2)') + l(a_1' \cup b_1') =$$
$$= l((a_1 \cap b_2)') + l(a_1') + l(b_1') - l((a_1 \cap b_1)').$$

Da aber $a_1 \cap b_1 \in I$, d. h. $l((a_1 \cap b_1)') = 0$ gilt, erhalten wir

$$l(b_2') - l(b_1') = l((a_1 \cap b_2)') \geq 0.$$

Genauso erhält man

$$l(b_1') - l(b_2') = l((a_2 \cap b_1)') \geq 0, \text{ d. h. } l((a_1 \cap b_2)') = 0.$$

Das bedeutet $a_1 \cap b_2 \in I$, was zu zeigen war.

Es sei weiter $a \perp_I b$, $b < b_1$ und $a \cap b = a \cap b_1$. a und b_1 müssen dann unvergleichbar sein. Da $a \cap b \in I$, gilt auch $a \cap b_1 \in I$, d. h. $a \perp_I b_1$; $\perp_I$ genügt also ($\perp$ 5).

6. Der Hauptsatz der starken Unabhängigkeitsrelationen

SATZ 3. *Es sei L ein modularer Verband von endlicher Länge, und $\perp$ bezeichne eine starke Unabhängigkeitsrelation von L. Sind zwei Zerlegungen des Einselementes* 1

$$1 = (a_1 \times \ldots \times a_n)_\perp$$

und

$$1 = (b_1 \times \ldots \times b_m)_\perp$$

in $\perp$-direkte Vereinigung $\perp$-unzerlegbarer Elemente gegeben, so ist $n = m$ und jedes a_i ist gegen einem passendem b_j austauschbar, so daß $1 = (a_1 \times \ldots \times \times a_{i-1} \times b_j \times a_{i+1} \times \ldots \times a_n)_\perp$ gilt.

Nach Satz 2 ist für jedes U-Ideal eines modularen Verbandes von endlicher Länge $\perp_I$ eine starke Unabhängigkeitsrelation. So für $I = (0]$ gewinnen wir den Satz von SCHMIDT—ORE (Siehe z. B. [1] oder [2]). Mit $\perp_L$ erhält man den Satz von KUROS—ORE.

Der Beweis des Satzes 2 läuft ähnlich zum Beweis des Satzes von SCHMIDT—ORE.

BEWEIS. Ist $1 = (c_1 \times \ldots \times c_n)_\perp$, so soll c_i' das Element $c_1 \cup \ldots \cup \cup c_{i-1} \cup c_{i+1} \ldots \cup c_n$ bezeichnen. Wir werden mit Induktion nach der Länge des Verbandes zeigen, daß jedes a_i gegen einem passenden b_j austauschbar ist. Wir können selbstverständlich $i = 1$ voraussetzen.

(1) Erst betrachten wir den Fall, wenn für ein j $c = a_1 \cup b_j' < 1$ ist. Wir nehmen an, daß $j = 1$. Es sei $c \cap b_1 = b_1^* (< b_1)$. Dann gilt $b_1' \cup b_1^* = = b_1' \cup (c \cap b_1) = c \cap (b_1' \cup b_1) = c \cap 1 = c$.

Ist $c > b_1'$, so gilt $c = (b_1^* \times b_1')_\perp$. Aus $a_1 < c$ folgt weiter $c = (a_1 \times \times (c \cap a_1'))_\perp$. (Der Fall $a_1 = c$ ist trivial.) Ist weiter $b_1^* = (c_1 \times \ldots \times c_r)_\perp$ eine Zerlegung von b_1^* in $\perp$-direkte Vereinigung $\perp$-unzerlegbarer Elemente, so gilt für eine Teilmenge z. B. $\{c_1, \ldots, c_t\}$ von $\{c_1, \ldots c_r\}$ die Beziehung

$$c = (c_1 \times \ldots \times c_t \times b_2 \times \ldots \times b_n)_\perp.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dann entweder $c = (b_i \times \times (c \cap a_1'))_\perp$ $(i \geq 2)$ oder $c = (c_j \times (c \cap a_1'))_\perp$. Betrachten wir erst den zweiten Fall. Es gilt $c_j \cup a_1' = c_j \cup (c \cap a_1') \cup a_1' = c \cup a_1' = 1$. Da $c_j \cap a_1' = c_j \cap \cap (c \cap a_1')$ ist, gilt nach ($\perp$ 5) auch $1 = (c_j \times a_1')_\perp$.

Wegen $c_j \leq b_1^* < b_1$ folgt $b_1 = (c_j \times (a_1' \cap b_1))_\perp$. b_1 ist aber $\perp$-unzerlegbar und so muß $b_1 = c_j$; und damit auch $b_1 = b_1^*$ gelten. Das ist aber nach unserer Voraussetzung unmöglich. Es gilt also $c = (b_i \times (c \cap a_1'))_\perp$ d. h. $1 = (b_i \times a_1')_\perp$. a_1 ist folglich gegen b_i austauschbar.

Ist $c = b_1'$, so gilt $a_1 \leq b_1'$ und nach der Induktionsvoraussetzung ist dann a_1 gegen einem b_i $(i \geq 2)$ austauschbar.

(2) Der zweite Fall ist, wenn für jedes j ($j = 1, 2, \ldots, m$) $a_1 \cup b_j' = 1$ gilt. Wenn $b_j \cup a_1' < 1$ für jedes j, so können wir, wie unter dem ersten Fall, b_1 gegen a_1', b_2 gegen a_2' usw. austauschen.

Es gibt also ein j, so daß $j' = 1$ ist, folglich muß $b_j \cup a_1' = 1$ gelten, was der Voraussetzung widerspricht. Es existiert also ein j, z. B. $j = 1$, daß $b_1 \cup a_1' = b_1' \cup a_1 = 1$ ist. Axiom ($\perp$ 4) sichert dann $b_1 \perp a_1'$ d. h. a_1 ist gegen b_1 austauschbar.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXV, Providence, 1967.
[2] P. M. Cohn, *Universal algebra*, New York, 1965.
[3] A. Kertész, On independent sets of elements in algebra, *Acta Sci. Math.* (Szeged), **21** (1960), 260—269.
[4] S. Maeda, A Lattice Theoretic Treatment of Stochastic Independence, *J. Sci. Hiroshima Univ.* **27** (1963), 1—5.
[5] E. Marczewski, A general scheme of the notions of independence in mathematics, *Bulletin de l'Acad. Polonaise des Sciences, Série des sciences math., astr. et physiques* **6** (1958), 731—736.
[6] E. T. Schmidt, Eine Verallgemeinerung des Satzes von Schmidt-Ore, *Publ. Math. Debrecen* (im Druck).
[7] G. Szász, Marczewski independence in lattices and semilattices, *Colloquium Mathematicum* **10** (1963), 15—20.

(Eingegangen am 30. Dezember 1969.)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE,
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13–15.
HUNGARY