ÜBER DIE ANORDNUNG VON RINGEN

Von

G. GRÄTZER und E. T. SCHMIDT (Budapest)

(*Vorgelegt von* L. Rédei)

Es sei R ein beliebiger angeordneter Ring ohne Nullteiler und I ein Ideal von R. Offenbar induziert die Anordnung von R eine Anordnung in I. Nun stellt sich die Frage, ob die Umkehrung dieser Behauptung gilt, d. h. ob jeder Ring R ohne Nullteiler und mit einem angeordneten Ideal I $(\neq 0)$ stets angeordnet werden kann, und wenn ja, auf wieviele Weisen sich die Anordnung von I auf R fortsetzen läßt.

Satz. *Es sei R ein Ring ohne Nullteiler und I ein von Null verschiedenes Ideal in R. Läßt I eine Anordnung zu, so kann R auf eine und nur eine Weise so angeordnet werden, daß die Anordnung von I erhalten bleibt.*[1]

Beweis. Nehmen wir an, daß I eine Anordnung mit dem Positivitätsbereich P zuläßt. Wir definieren eine Teilmenge Q von R folgendermaßen: $x \in R$ gehört dann und nur dann zu Q, wenn es ein $\alpha \in P$ mit $x\alpha \in P$ gibt. Wir zeigen, daß Q ein P enthaltender Positivitätsbereich in R ist.

1. Gilt $\alpha x \in P$ für ein $\alpha \in P$ und $x \in R$, so gilt $x\beta \in P$, und folglich auch $\beta x \in P$ für jedes $\beta \in P$. Da P keine Nullteiler enthält, ist $x\beta$ von Null verschieden. Wäre $-x\beta \in P$, so würde $-\alpha x\beta \in P$ gelten, aber aus $\alpha x \in P$ ergibt sich $\alpha x\beta \in P$; der Widerspruch bestätigt die Behauptung. Es folgt, daß $x \in Q$ genau dann, falls für alle $\alpha \in P$, $x\alpha$ und αx zu P gehören.

2. Für jedes Element $x \in R$ gilt genau eine der Beziehungen: $x = 0$, $x \in Q$, $-x \in Q$. Ist nämlich $x = 0$, so gilt $x \notin Q$, weil für jedes $\alpha \in P$, $x\alpha = 0 \notin P$. Sei $x \neq 0$, dann gilt für jedes $\alpha \in P$ entweder $\alpha x \in P$ oder $-\alpha x \in P$, somit gehört entweder x oder $-x$ zu Q.

3. Q ist Halbmodul. Gilt nämlich $x \in Q$, $y \in Q$, deshalb $\alpha x \in P$, $\alpha y \in P$ für jedes $\alpha \in P$, so besteht auch $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \in P$, woraus $x+y \in Q$ folgt.

4. Q ist eine multiplikative Halbgruppe. Aus $x \in Q$, $y \in Q$ folgt $\alpha x \in P$ für jedes $\alpha \in P$, ferner auch $(\alpha x)y \in P$, deshalb $\alpha(xy) \in P$, also $xy \in Q$.

[1] Nach einer brieflichen Mitteilung von Prof. L. Rédei hat er einen Teil dieses Satzes bewiesen.

Da ersichtlich $P \subseteq Q$, ist Q in der Tat ein Positivitätsbereich in R, der eine solche Anordnung von R definiert, die die Anordnung von I fortsetzt.

Um die Eindeutigkeit einzusehen, nehmen wir an, daß in R noch ein Positivitätsbereich Q_1 existiert, der P enthält. Aus $x \in Q_1$ folgt offenbar $\alpha x \in P$ für jedes $\alpha \in P \subseteq Q_1$, also — nach der Definition von Q — gehört x zu Q. Umgekehrt sei $x \in Q$; wäre $-x \in Q_1$, so würde wegen des Bewiesenen $-x \in Q$ folgen, was unmöglich ist, also $x \in Q_1$. Folglich $Q = Q_1$ und somit ist der Beweis des Satzes beendet.

FOLGERUNG. *Ein Ring ohne Nullteiler läßt sich genau dann anordnen, wenn seine engste, Einselement besitzende Ringerweiterung ohne Nullteiler eine Anordnung zuläßt.*[2] *Die Anordnungen der beiden Ringe können eindeutig einander zugeordnet werden.*

Zum Schluß sei bemerkt, daß unser Satz im kommutativen Fall nichts neues behauptet, da jedes Ideal eines Integritätsbereiches R denselben Quotientenkörper wie R besitzt und die Anordnung eines Integritätsbereiches auf genau eine Weise zu einer Anordnung des Quotientenkörpers fortgesetzt werden kann.

(Eingegangen am 18. März 1957.)

[2] J. SZENDREI, On the extension of rings without divisors of zero, *Acta Sci. Math. Szeged*, **13** (1950), S. 231—234.

Technikai szerkesztő: Molnár Ferenc
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat beérkezett: 1957. III. 15. — Terjedelem: 22,75 (A/5) ív, 29 ábra
Szegedi Nyomda Vállalat 57-1011 Felelős vezető: Vincze György