ALGEBRAI STRUKTÚRÁK KONGRUENCIARELÁCIÓIRÓL

Írta: SCHMIDT E. TAMÁS

Bevezetés

Mint ismeretes (lásd [1]) egy tetszőleges A algebrai struktúra* $\Theta, \Phi \ldots$ kongruenciarelációi a természetes részbenrendezésre nézve [$\Theta \leqq \Phi$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x \equiv y(\Theta)$ maga után vonja $x \equiv y(\Phi)$-t] komplett hálót alkotnak, melyet $\Theta(A)$-val jelölünk. Feladatunk $\Theta(A)$ szerkezetének megismerése. Egy adott A struktúrából kiindulva annál könnyebb $\Theta(A)$ vizsgálata, minél több kongruenciarelációja írható A-nak $\Theta_{a,b}$ alakba. ($\Theta_{a,b}$ a legkisebb olyan kongruenciarelációt jelöli, melynél $a \equiv b$. A $\Theta_{a,b}$ alakba írható kongruenciarelációkat minimálisnak nevezzük.) Ha például minden kongruenciareláció minimális, akkor nagyon szoros az adott A struktúra elemeinek és kongruenciareláció hálójának kapcsolata. Mivel minket vizsgálatainkban $\Theta(A)$ szerkezete érdekel, ezért kézenfekvő gondolat az A struktúrát egy olyan S struktúrára kicserélni, hogy $\Theta(A)$ és $\Theta(S)$ izomorfok legyenek, s emellett S-nek a lehető legtöbb kongruenciarelációja legyen minimális. HASHIMOTO [3] egyik tétele szerint a minimális kongruenciarelációk szükségképp alulról elérhetetlenek. A dolgozat főeredménye ennek megfordítása: olyan S struktúrát konstruálunk, melyre $\Theta(S) \simeq \Theta(A)$ és $\Theta(S)$ minden alulról elérhetetlen eleme minimális.

Ez a tétel első kísérlet, hogy teljesen általános algebrai struktúrákra vonatkozóan bizonyítási módszert nyújtson. Ezen módszer alkalmazására a dolgozat két példát tárgyal. Elsőként P. M. WHITMAN [6] egy nevezetes tételére ad új bizonyítást. Ezen tétel szerint minden véges háló beágyazható egy partició hálóba.

A módszer másik alkalmazása a MALCEV által bevezetett részleges algebrai struktúrák, másnéven algebrai strukturoidok elméletében történik. Bebizonyítjuk, hogy minden véges háló izomorf valamely véges algebrai strukturoid kongruenciareláció hálójával.

* Az absztrakt algebrai és hálóelméleti fogalmakra nézve az [1] könyvre utalunk.

1. §. Előkészületek

Legyen A valamely algebrai struktúra. Az A-n értelmezett műveletek összességét jelölje $M(A)$. Már a bevezetésben is említettük, hogy a természetes részberendezésre nézve A kongruenciarelációinak összessége, $\Theta(A)$, hálót alkot. G. BIRKHOFF és V. S. KRISHNAN (lásd [1]) következő tétele effektive megadja ezeket a műveleteket:

Legyen $\{\Theta_\alpha\}$ valamely részhalmaza $\Theta(A)$-nak. A $\{\Theta_\alpha\}$ kongruenciarelációk komplett metszeténél x és y $(x, y \in A)$ akkor és csak akkor kongruensek, ha $x \equiv y\ (\Theta)$ minden $\Theta \in \{\Theta_\alpha\}$-ra. A $\{\Theta_\alpha\}$ kongruenciarelációk komplett egyesítésénél x és y akkor és csak akkor kongruensek, ha alkalmas $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ sorozatra $x_{i-1} \equiv x_i\ (\Theta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ megfelelőképp választott $\Theta_i \in \{\Theta_\alpha\}$-val.

A komplett metszet definíciójából látható, hogy az összes olyan kongruenciareláció metszeténél, melyeknél $a \equiv b$ (rögzített $a, b \in A$-ra), szintén fennáll $a \equiv b$. Így tehát valóban létezik $\Theta_{a,b}$.

Az A struktúrán belül meg lehet adni azt, hogy mely elempárok kongruensek moduló $\Theta_{a,b}$ $(a, b \in A)$. A tétel egyszerűbb megfogalmazhatósága kedvéért előbb bizonyítjuk a következőt:

1. LEMMA: *Minden A algebrai struktúrához található olyan S algebrai struktúra, hogy $\Theta(A) \simeq \Theta(S)$ és $M(S)$-ben csak egyváltozós műveletek vannak.*

BIZONYÍTÁS: Legyen az S struktúra ugyanazon a halmazon értelmezve, mint A. Legyen $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ valamely tetszőleges n-változós művelete A-nak. Ha ennek a műveletnek $n-1$ változóját rögzítjük, akkor egy egyváltozós műveletet nyerünk.

$M(S)$-et úgy definiáljuk, mint $M(A)$ összes egyváltozós műveleteit, továbbá az összes többváltozós műveletből, az összes lehetséges módon elkészített egyváltozós müveleteket. Könnyű belátni, hogy $\Theta(S) \simeq \Theta(A)$. Sőt még ennél több is igaz. Az is világos, hogy S és A kongruenciarelációi ugyanazokat a maradékosztályokat létesítik.

Az 1. lemma egyszerűsége ellenére is fontos. Ugyanis, mint a bevezetésben is említettük, adott $\Theta(A)$ mellett célunk az A sruktúrát olyan S struktúrára kicserélni, hogy $\Theta(A) \simeq \Theta(S)$ s amellett az S struktúrából már elég sok következtetést vonhassunk le $\Theta(S)$-re. Az első ilyen kicserélési lépést mutatja meg az 1. lemma.

Legyen adott az A struktúra; most már feltesszük, hogy $M(A)$-ban csupán egyváltozós műveletek szerepelnek. Azt mondjuk, hogy A valamely a, b elempárjához hozzá van rendelve a c, d elempár, jelben $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$, ha alkalmas

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in M(A)$-ra

$$c = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n(a), \quad d = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n(b)$$

[$\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n(x)$ rövidített jelölése $\varphi_1(\varphi_2(\ldots \varphi_n(x))\ldots)$-nek].

2. LEMMA: *Az A csupa egyváltozós művelettel rendelkező struktúrában* $c \equiv d(\Theta_{a,b})$ *akkor és csak akkor teljesül, ha léteznek olyan* $c = y_0, y_1, \ldots, y_n = d$ *elemek, hogy*

$$\overline{a, b} \to \overline{y_{i-1}, y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A 2. lemma explicite kimondva még sehol sem szerepelt. Lényegében azonban tartalmazza A. I. MALCEV [4] dolgozata s hálók esetére R. P. DILWORTH [2]. Lényegében ugyanígy fogalmazható meg tetszőleges (véges sok változós) műveletekkel ellátott struktúrára is, számunkra azonban elég a fenti egyszerűbb alak.

Az 1. lemma mutat rá arra, hogy kongruencia szempontból miért jogos G. BIRKHOFF konvenciója: csak véges változós műveleteket engedünk meg, de ezekből akárhány lehet. Ugyanis az 1. lemma szerint kongruencia szempontból elég egyváltozós műveletekre szorítkozni, viszont már egy binérműveletből is végtelen sok egyváltozós műveletet kapunk.

Szükségünk lesz a következő lemmára:

3. LEMMA: *Az L háló egyesítés kongruenciarelációi komplett hálót alkotnak. Minden egyesítés kongruenciareláció,* $\Theta^{\cup}$, *felírható* $\bigvee \Theta^{\cup}_{a,b}$ *alakba, ahol* $\Theta^{\cup}_{a,b}$ *az a és b-t egybeejtő legkisebb egyesítés kongruenciarelációt jelöli.*

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az L hálónak csak az egyesítés műveletét. Erre nézve L algebrai struktúrát alkot: $L^{\cup}$. Így tehát BIRKHOFF [1] tétele szerint $L^{\cup}$ kongruenciarelációi komplett hálót alkotnak. $L^{\cup}$ kongruenciarelációi éppen L egyesítés kongruenciarelációi. Ezzel a 3. lemma első részét beláttuk. A $\Theta^{\cup}$ egyesítés kongruenciareláció nyilván előáll az összes olyan $\Theta^{\cup}_{a,b}$ egyesítésekép, melyre $a \equiv b(\Theta^{\cup})$.

Az A algebrai struktúra kongruenciareláció hálójának $\Theta(A)$-nak valamely $\{\Theta_\alpha\}$ részhalmazát irányított halmaznak nevezzük, ha minden $\Theta_\alpha, \Theta_\beta \in \{\Theta_\alpha\}$-hoz található $\Theta_\gamma \in \{\Theta_\alpha\}$, melyre $\Theta_\alpha \leqq \Theta_\gamma$, $\Theta_\beta \leqq \Theta_\gamma$ teljesül. Ha Θ előáll egy olyan irányított halmaz elemeinek komplett egyesítéseképp, amely irányított halmaznak önmaga nem eleme, akkor Θ-t alulról elérhetőnek nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy Θ alulról elérhetetlen. Az alulról elérhetetlen kongruenciarelációk fontos szerepet játszanak, struktúrájuk már meghatározza $\Theta(A)$ szerkezetét. Az alulról elérhetetlen kongruenciarelációk leírását tartalmazza a következő tétel, mely J. HASHIMOTÓTÓL (lásd [3]) származik:

4. LEMMA: *Legyen A algebrai struktúra s* $\Theta \in \Theta(A)$. *A* Θ *kongruenciareláció akkor és csak akkor alulról elérhetetlen, ha véges sok minimális kongruenciareláció egyesítése.*

2. §. Az alulról elérhetetlen és a minimális kongruenciarelációk kapcsolata

Láttuk az eddigiekből, hogy a minimális kongruenciarelációk a legegyszerűbben leírhatók s így a legkönnyebben kezelhetők. Másrészről az is világos, hogy az eredeti struktúra elemei ezekkel a kongruenciarelációkkal vannak legszorosabb kapcsolatban, például az eredeti struktúra elemeinek permutációjára ezek a kongruenciarelációk a legérzékenyebbek. Kívánatos tehát, hogy a struktúrának minél több minimális kongruenciarelációja legyen. A dolgozat erre vonatkozó főeredménye a következő:

1. TÉTEL: *Minden S algebrai struktúrához található olyan T algebrai struktúra, melyre $\Theta(S) \cong \Theta(T)$ és $\Theta(T)$-nek minden alulról elérhetetlen eleme minimális.*

Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni, hogy az 1. tétel mit mond a 4. lemma szempontjából. Tudjuk, hogy minden Θ kongruenciareláció minimális kongruenciarelációk komplett egyesítése, $\Theta = \bigvee \Theta_{a,b}$. Θ általában sokféleképpen írható fel, mint minimális kongruenciarelációk egyesítése. Tekintsük mindazon kardinális számokat, amilyen számosságú minimális kongruenciareláció egyesítéseképp Θ előállítható. A kardinális számok jólrendezettsége miatt ezek között lesz egy legkisebb; nevezzük ezt Θ rendjének. HASHIMOTO tétele azt mondja ki, hogy Θ rendje akkor és csak akkor véges, ha Θ alulról elérhetetlen, másszóval a rend véges, vagy végtelenségét $\Theta(A)$-n belül hálóelméleti eszközökkel el lehet dönteni. Tegyük már most fel, hogy Θ rendje véges. El lehet vajon dönteni, hogy mekkora? Legalább azt, hogy Θ minimális-e? Az 1. tétel szerint ezekre a kérdésekre tagadó a válasz. Hálóelméleti szempontból semmi sem különbözteti meg a minimális kongruenciarelációkat ezek véges egyesítéseitől.

BIZONYÍTÁS: A gondolatmenet a következő: először az S struktúrát kicseréljük az S' struktúrára, melyben már csak egyváltozós műveletek vannak. Ezután az S' struktúrából megkonstruálunk egy olyan T_1 struktúrát, melyben az előre kiszemelt $\Theta_{a,c} \cup \Theta_{b,d}$ (esetleg másodrendű) kongruenciareláció már minimális. Eljárásunkat transzfinit indukcióval folytatva, nyerjük a tétel állítását.

Induljunk ki tehát az S algebrai struktúrából. Az 1. lemma alapján feltehetjük, hogy S csupán egyváltozós műveleteket tartalmaz. Rögzítsük le S két elemét: a és b-t. Megkonstruáljuk a T_1 struktúrát.

Formálisan képezzük minden $x \in S$-re az $f(x)$ elemet (f tehát nem valamely művelete S-nek!) azon egyetlen megszorítással, hogy $a = f(b)$. Az $f(x)$ alakú elemek halmazát $f(S)$-sel jelöljük; S-nek tehát $f(S)$-sel egyetlen közös eleme van, a, s $x \neq y$ esetén $(x, y \in S) f(x) \neq f(y)$.

Tekintsük ezután a $T_1 = S \cup f(S)$ halmazt. Ezen a halmazon egyváltozós műveleteket értelmezünk. Tekintsük először az $f(x)$ és $g(x)$ egyváltozós műveletek definícióját: Az $f(x), x \in S$ esetén, a formálisan értelmezett $f(x)$ elem, s ha $y = f(x)$, akkor $f(y) = ff(x) = f(a)$; $x \in S$ esetén $g(x) = b$ és $gf(x) = x$. T_1-re kiterjesztjük az összes, S-en értelmezett egyváltozós műveletet. Legyen $\omega(x) \in M(S)$. Ha $x \in S$, akkor $\omega(x)$ őrizze meg eredeti jelentését s $y = f(x)$ esetén legyen $\omega f(x) = \omega(a)$. Az $f(x)$, $g(x)$ és $\omega(x)$ $(\in M(S))$ egyváltozós műveletek alkossák $M(T_1)$-et. Ezzel T_1-et algebrai struktúrává tettük.

Belátjuk először, hogy $\Theta(S) \cong \Theta(T_1)$. Legyen $\Theta \in \Theta(S)$. Definiáljuk T_1-en a következő relációt: $u \equiv v(\bar{\Theta})$ akkor és csak akkor áll fenn, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(1) $u, v \in S$ és $u \equiv v(\Theta)$;

(2) $u = f(x), v = f(y)$ és $x \equiv y(\Theta)$;

(3) $x \equiv a(\Theta), b \equiv y(\Theta)$ és vagy $u = x, v = f(y)$, vagy $u = f(y), v = x$.

Igazoljuk, hogy T_1-nek $\bar{\Theta}$ relációja kongruenciareláció.

Világos, hogy $\bar{\Theta}$ reflexív és szimmetrikus.

Legyen $u \equiv v(\bar{\Theta})$ és $v \equiv w(\bar{\Theta})$. Ha $u, v, w \in S$ vagy $u, v, w \in f(S)$, akkor a tranzitivitás (vagyis $u \equiv w(\bar{\Theta})$) nyilvánvaló, mert lényegében Θ tranzitivitásáról van szó (ugyanis $f(x) \equiv f(y)(\bar{\Theta})$ (2) szerint akkor és csak akkor teljesül, ha $x \equiv y(\Theta)$). Tekintsük az $u, v \in S, w \in f(S)$ esetet (az $u \in S$; $v, w \in f(S)$ eset hasonlóan tárgyalható). Ekkor $u \equiv v(\Theta)$, $v = a(\Theta), x \equiv b(\Theta)$, ahol $w = f(x)$ ((1) és (3) alapján), így tehát Θ tranzitivitása folytán $u \equiv a(\Theta)$, tehát (3) miatt $u \equiv w(\bar{\Theta})$. Végezetül foglalkozunk az $u, w \in S, v \in f(S)$ esettel ($u, w \in f(S), v \in S$ ugyanígy tárgyalható). Ekkor (3) szerint $u \equiv a(\Theta), b \equiv x(\Theta)$, $v = f(x), w \equiv a(\Theta)$, s ezek közül az első és harmadik kongruencia Θ tranzitivitása folytán $u \equiv w(\Theta)$-t adja, ami (1) alapján a kívánt $u \equiv w(\bar{\Theta})$-t jelenti.

Ezután igazoljuk $\bar{\Theta}$-ra a helyettesítési elvet. Azt kell belátnunk, hogy ha $\psi(x) \in M(T_1)$ és $u \equiv v(\bar{\Theta})$, akkor $\psi(u) \equiv \psi(v)(\bar{\Theta})$ is fennáll. Három esetet különböztetünk meg:

a) $u, v \in S$. $f(u) \equiv f(v)(\bar{\Theta})$ (2) alapján adódik. A $g(x)$ műveletet alkalmazva, a triviális $b \equiv b(\bar{\Theta})$-hoz jutunk. Ha $\omega(x)$ S-nek valamelyik T_1-re kiterjesztett művelete, akkor $\omega(u) \equiv \omega(v)(\Theta)$ így (1) alapján $\omega(u) \equiv \omega(v)(\bar{\Theta})$.

b) $u, v \in f(S)$. Ekkor $u = f(x)$, $v = f(y)$ és fennáll $x \equiv y(\Theta)$. Az $f(x) \equiv f(y)$ mindkét oldalára az $f(x)$ műveletet alkalmazva $f(a) \equiv f(a)$-t nyerjük. A $g(x)$ művelettel $x = gf(x) \equiv gf(y) = y$ adódik, ami (1) szerint szintén helyes. Végül valamely S-ről kiterjesztett $\omega(x)$ művelettel $\omega(a) \equiv \omega(a)$ adódik.

c) $u \in S, v \in f(S)$. Ekkor $v = f(x)$ s fennállnak az $u \equiv a(\Theta), b \equiv x(\Theta)$ kongruenciák. $u \equiv v(\Theta)$-ra mindkét oldalt alkalmazva rendre az $f(x), g(x)$ és

$\omega(x)$ műveleteket $f(u) \equiv f(a)\ (\bar{\Theta}), b \equiv x(\bar{\Theta}), \omega(x) \equiv \omega(a)\ (\bar{\Theta})$ adódik, amely kongruenciák valóban könnyen nyerhetők a feltételből.

Ezzel tehát beláttuk, hogy $\bar{\Theta}$ kongruenciareláció. $\bar{\Theta}$ egy osztályozását létesíti S-nek is, mint T_1 részhalmazának, s ez az osztályozás egybeesik a Θ által létesített osztályozással.

Kimutatjuk, hogy a $\Theta \to \bar{\Theta}$ megfeleltetés izomorfizmus $\Theta(S)$ és $\Theta(T_1)$ között. Először is belátjuk, hogy T_1-nek mindegyik kongruenciarelációja előállítható $\bar{\Theta}$ alakban. Valóban, legyen $\Phi \in \Theta(T_1)$. Φ létesít S-en egy osztályozást, melyet indukáló $\Theta(S)$-beli kongruenciarelációt jelölje Θ. Belátjuk, hogy $\Phi = \bar{\Theta}$. Legyen $u \equiv v\ (\Phi)$. Ha $u, v \in S$, akkor az állítás nyilvánvaló. Világos az $u, v \in f(S)$ esetben is, hiszen $f(x) \equiv f(y)\ (\Phi)$ ekvivalens $x \equiv y\ (\Phi)$-vel. Az $u \in S, v \in f(S)\ (v = f(x))$ esetben a kongruencia mindkét oldalára alkalmazzuk az $f(x)$ függvényt, $f(u) \equiv f(v) = ff(x) = f(a)\ (\Phi)$ adódik, majd a $g(x)$ függvényt, s $u = gf(u) \equiv gf(a) = a\ (\Phi)$-t kapjuk. A tranzitivitás folytán tehát $a \equiv v\ (\Phi)$, vagyis $b = g(a) \equiv g(v) = gf(x) = x\ (\Phi)$ is fennáll. Így a Θ kongruenciarelációnál $u \equiv a$ és $b \equiv x$, vagyis T_1-re való kiterjesztésénél a (3) szabály szerint fennáll $u \equiv f(x)\ (\bar{\Theta})$, ami a bizonyítandó volt. Beláttuk tehát, hogy $\Theta \to \bar{\Theta}$ egy-egyértelmű megfeleltetés $\Theta(S)$ és $\Theta(T_1)$ között. A kiterjesztésre vonatkozó szabály miatt az is nyilvánvaló, hogy $\Theta > \Phi$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\bar{\Theta} > \bar{\Phi}$ fennáll. Ha két háló között adva van valamely egy-egyértelmű, kölcsönösen szigorúan monoton leképezés, akkor az szükségképp izomorfia, így $\Theta(S)$ és $\Theta(T_1)$ valóban izomorfok.

Másodszor bebizonyítjuk, hogy

$$\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{b,d} = \bar{\Theta}_{c,f(d)}.$$

Valóban, $b \equiv d\ (\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{b,d})$ s ebből adódik, hogy $a = f(b) \equiv f(d)(\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{b,d})$, s ezt összevetve $a \equiv c\ (\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{b,d})$-vel $c \equiv f(d)\ (\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{c,d})$-t kapjuk, s így $\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{b,d} \geqq \bar{\Theta}_{c,f(d)}$. Megfordítva, $c \equiv f(d)\ (\bar{\Theta}_{c,f(d)})$-ből $f(c) \equiv ff(d) = f(a)\ (\bar{\Theta}_{c,f(d)})$ azaz $c = gf(c) \equiv gf(a) = a\ (\bar{\Theta}_{c,f(d)})$-t kapunk, tehát a tranzitivitás miatt $a = f(b) \equiv f(d)\ (\bar{\Theta}_{c,f(d)})$ és $b \equiv d\ (\bar{\Theta}_{c,f(d)})$. Így $\bar{\Theta}_{a,c} \leqq \bar{\Theta}_{c,f(d)}$ és $\bar{\Theta}_{b,d} \leqq \bar{\Theta}_{c,f(d)}$ tehát $\bar{\Theta}_{a,c} \cup \bar{\Theta}_{b,d} \leqq \bar{\Theta}_{c,f(d)}$, amivel a kívánt egyenlőséget bizonyítottuk.

Ezzel teljes egészében beláttuk, hogy T_1 megfelel a kirótt feltételeknek.

Tekintsük azon T struktúrák $\{T_\alpha\}$ osztályát, mely eleget tesz a következő kikötéseknek:

A) $S \subseteq T$ és S-nek minden művelete ki van terjesztve T-re, amit formálisan $M(S) \subseteq M(T)$-vel jelölünk.

B) $\Theta(S) \cong \Theta(T)$.

C) Legyen $\Phi \in \Theta(T)$ s jelölje $\Theta \in \Theta(S)$ azt a kongruenciarelációt, amely S-en ugyanazt az osztályozást létesíti, mint Φ. A Θ által T-n indukált kongruenciareláció megegyezik Φ-vel.

$\{T_\alpha\}$-n definiálunk egy részbenrendezést a következőképp: $T_\alpha < T_\beta$ akkor és csakis akkor teljesül, ha S és T helyett T_α és T_β-ra teljesülnek az A), B) és C) feltételek, továbbá T_α-nak van olyan nem minimális kongruenciarelációja, amely T_β-n már minimális. A definiált reláció nyilván részbenrendezés. Legyen $\{T_\beta\}_{\beta\in B}$ valamely lánca $\{T_\alpha\}$-nak. Definiáljuk a T algebrai struktúrát a következőkép: $x\in T$ akkor és csakis akkor teljesül, ha valamely $\beta\in B$-re $x\in T_\beta$, s legyen $M(T)=\bigvee_{\beta\in B} M(T_\beta)$. Mivel $T_\alpha < T_\beta$ esetén T_α minden művelete ki van terjesztve T_β-ra is, ezért valóban T algebrai struktúra. Belátjuk, hogy $T\in\{T_\alpha\}$. A) világos. Akárhogyan veszünk egy $\Theta\in\Theta(S)$-et, az ki van terjesztve minden T_β-ra s így magára T-re is. (Ezek a kiterjesztések egymás folytatásai éppen mert $\{T_\beta\}_{\beta\in B}$ lánc.) Ezen kiterjesztett kongruenciareláció bír a C)-ben leírt tulajdonsággal, hiszen ellenkező esetben (ez épp a 2. lemmából látható világosan, hozzátéve még, hogy T-nek bármelyik véges részhalmaza benne van egy alkalmas T_β-ban) már valamelyik T_β-ban ellentmondásra jutnánk. Ugyanígy látható be B) teljesülése is.

Beláttuk, hogy $\{T_\alpha\}$-ban minden részláncnak van maximális eleme, így a Kuratowski—Zorn lemma kissé általánosabb formájából látható, hogy $\{T_\alpha\}$-ban van maximális elem, jelölje az egyiket T. Belátjuk, hogy T eleget tesz az 1. tétel feltételeinek. $\Theta(T)\cong\Theta(S)$ adódik $T\in\{T_\alpha\}$-ból. Tegyük fel, hogy $\Theta(T)$-ben van véges rendű de nem minimális kongruenciareláció. Ekkor T-ből kiindulva és a tétel elején leírt konstrukciót ismét alkalmazva $\{T_\alpha\}$-nak egy T-nél nagyobb eleméhez jutnánk, amely ellentmondás T maximalitásával. Ezzel az 1. tétel igazolását befejeztük.

Kiegészítés. Ha az S struktúra véges, akkor T is végesnek vehető.

A kiegészítés állítása a konstrukcióból nyilvánvaló.

Látható, hogy a konstrukcióban megadott struktúra semilyen szokásos struktúra osztályba (csoport, gyűrű, háló stb.) sem tartozik. Felmerül tehát a következő probléma: egyes struktúra osztályokra találjunk olyan konstrukciót, mely az adott struktúra osztályból nem vezet ki, vagyis ha S benne van, akkor T is eleme. Ez eddig csak két struktúra osztályra, a véges és a disztributív hálók osztályára sikerült megadni. Erre majd másutt visszatérünk. Csoportok, gyűrűk, végtelen hálók esetében a probléma igen nehéznek tűnik.

3. §. Partició hálók véges részhálói

A Whitman tétel egyszerűen fog adódni a következő lemmából:

5. LEMMA: *Legyen S véges algebrai struktúra, Θ_α, Φ_α nem zéró elemei $\Theta(S)$-nek, s teljesüljön a $\Theta_\alpha\leqq\Phi_\alpha$ egyenlőtlenség. Létezik egy olyan T algebrai struktúra, hogy $\Theta(T)$ tartalmaz $\Theta(S)$-nek $\bigvee_\alpha \Theta_{\Theta_\alpha,\Phi_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorf képével izomorf részhálót.*

BIZONYÍTÁS: Az 1. lemma és 1. tétel szerint feltehető, hogy S-en csak egyváltozós műveletek vannak értelmezve s hogy $\Theta(S)$ minden eleme minimális kongruenciareláció, s így $\Theta_\alpha = \Theta_{a_\alpha, b_\alpha}$, $\Phi_\alpha = \Theta_{c_\alpha, d_\alpha}$. Definiáljunk minden az $\bigvee_\alpha^{\cup} \Theta_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$-ban szereplő α indexre egy $f_\alpha(x)$ függvényt úgy, hogy $f_\alpha(a_\alpha) = c_\alpha, f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$ és minden $x \in S\,(x \neq a_\alpha, b_\alpha)$-ra az $f_\alpha(x)$ új elem. Legyen az $f_\alpha(x)$ elemek halmaza $f_\alpha(S)$. Az $\bigvee_\alpha (S \cup f_\alpha(S))$ halmaz nem struktúra, hiszen sem az $f_\alpha(x)$ sem a $\varphi_\beta \in M(S)$-beli műveletek az $f_\alpha(S)$-eken nincsenek értelmezve. Ismét formálisan definiáljuk $\varphi_\beta f_\alpha(S)$-et (természetesen feltéve, hogy S-nek nem épp az a_α vagy b_α eleméről van szó), továbbá $f_\beta \varphi_\beta f_\alpha(S)$-et és így tovább az $f_\alpha(x)$-ek és az $M(S)$-beli műveletek összes lehetséges véges sorrendjét figyelembe véve. Ezen új elemek közül kettő csak úgy eshet egybe, ha az az $f_\alpha(a_\alpha) = c_\alpha, f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$ szabályokból következik. Tekintsük az így kapott elemek halmazát és jelöljük T-vel. Nyilvánvalóan a T halmazon értelmezve vannak mind az f_α, mind az $M(S)$-beli műveletek. Így tehát T algebrai struktúra.

Állítjuk, hogy T kielégíti a lemma feltételeit.

Tekintsük S-nek egy Θ kongruenciarelációját. Definiáljuk $\bar{\Theta}$-t, T egy relációját, a következőképp: $x \equiv y\,(\bar{\Theta})$ akkor és csak akkor, ha léteznek olyan x_i, y_i—k $(\in A, i = 1, \ldots, n)$, hogy $x_i \equiv y_i\,(\Theta)$, továbbá olyan $x = z_0, z_1, \ldots z_n = y$ T-beli sorozat, melyre $\overline{x_i, y_i} \to \overline{z_{i-1}, z_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Könnyű belátni, hogy $\bar{\Theta}$ kongruenciareláció. Mivel az $a_\alpha \equiv b_\alpha$ kongruencia mindkét oldalára alkalmazva az $f_\alpha(x)$ műveleteket $c_\alpha = f_\alpha(a_\alpha) \equiv f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$ adódik, ezért $\bar{\Theta}_\alpha = \bar{\Phi}_\alpha$. Hasonlóképp látható, hogy ha két kongruenciareláció, Φ_1 és Φ_2 kongruens $\bigvee_\alpha^{\cup} \Theta_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$-nál, akkor $\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi}_2$. Továbbá semmilyen, az $f_\alpha(x)$-ekkel bejövő új hozzárendedelés egyetlen $\Theta_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}^{\cup}$-nál kisebb kongruenciarelációt nem bánt, hiszen egy új művelet csak az $\overline{a_\alpha, b_\alpha} \to \overline{c_\alpha, d_\alpha}$ hozzárendelést létesíti s ha valamilyen kongruenciarelációnál már $a_\alpha \equiv b_\alpha$, akkor az már nagyobb, vagy egyenlő, mint Θ_α. Nyilvánvalóan az eredeti struktúrán belül más hozzárendelés nem létesült, hiszen más elempárokra az új $f_\alpha(x)$ operációk alkalmazása kivezet az S struktúrából s visszamenésre nincsen lehetőség. Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük.

Láthatjuk, hogy a bizonyítás leglényegesebb pontja az, hogy a Θ_α és Φ_α-k minimális kongruenciarelációk. Ha ugyanis Θ_α-ról csak annyit tudnánk, hogy alulról elérhetetlen, vagyis $\Theta_\alpha = \bigvee_{i=1}^{n} \Theta_{a_i, b_i}$, akkor nem tehetnénk meg, hogy az a_i, b_i-kre definiálnánk új függvényeket, mert ekkor a Θ_α-nál kisebb Θ_{a_i, b_i} kongruenciarelációkat is megbolygatnánk, vagyis a $\Theta \to \bar{\Theta}$ megfeleltetés nem a $\bigvee_\alpha^{\cup} \Theta_{a_\alpha, b_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorfizmus volna. Az 5. lemma vég-

eredményben azt állítja, hogy véges algebrai struktúra kongruenciareláció hálójának minden egyesítés homomorf képe beágyazható egy algebrai struktúra kongruenciareláció hálójába és így egy partició hálóba (ugyanis egy algebrai struktúra kongruenciarelációinak hálója komplett részhálója a struktúrán, mint halmazon értelmezett partició hálónak). Az átfogalmazás helyességének igazolásához csak azt kell belátnunk, hogy az 5. lemmában szereplő egyesítés homomorfizmus a lehető legáltalánosabb. Azonban mint a 3. lemmából tudjuk, minden egyesítés kongruenciareláció minimális egyesítés kongruenciarelációk egyesítése. Így tehát alkalmazható az 5. lemma. Ezen megjegyzés után igazoljuk Whitman tételét:

2. TÉTEL: *Minden véges háló beágyazható egy partició hálóba.*

BIZONYÍTÁS: Azzal az ismert ténnyel kezdjük, hogy minden véges L hálóhoz található olyan B véges Boole-algebra, melynek L egyesítés homomorf képe. Valóban, legyen B az L háló összes részhalmazának Boole-algebrája. Feleltessük meg B egy elemének, amely L valamely részhalmaza, ezen elemek L-beli egyesítését. Könnyű számolás mutatja, hogy ezáltal épp a kívánt egyesítés homomorfizmust kaptuk.

Minden véges Boole-algebra alkalmas algebrai struktúrának (ti. önmagának) kongruenciareláció hálója s így az 5. lemma s az előbbi megjegyzés szerint ezek minden egyesítés homomorf képe, azaz minden véges háló beágyazható kongruenciareláció hálóba s így partició hálóba.

4. §. Algebrai strukturoidok kongruenciarelációi

Sok olyan algebrai operációval találkozunk, melynek az értelmezési tartománya nem az egész struktúra. Például egy gyűrű elem multiplikatív inverze közismert ilyen fogalom, ugyanis egy gyűrűben nem minden elemnek van szükségképpen inverze. Hasonlóképpen egy elem komplementumának fogalmát is általánosan használják a hálóelméletben olyan hálók esetében is, ahol nem minden elemnek van komplementuma. Pontosabban szólva, a gyűrűknél az x^{-1}, illetve hálóknál az x' operáció értelmezési tartománya általában nem az egész struktúra. MALCEV [4] mutatott rá, hogy az ilyen operációkat is (tehát ahol az értelmezési tartomány nem szükségképpen esik egybe az egész struktúrával) teljesjogú operációknak kell tekintenünk. Egy ilyen operációt részleges algebrai műveletnek nevezünk. Az algebrai strukturoid (másnéven részleges algebrai struktúra) egy olyan halmaz, melyen adott egy vagy több (de mindig véges változójú) részleges algebrai művelet.

Mint ismeretes, egy S algebrai struktúra kongruenciarelációinak hálója izomorf az S halmaz partició hálójának valamely részhálójával, mégpedig ezt

az izomorfizmust úgy kapjuk meg, hogy egy kongruenciarelációinak megfeleltetjük az általa létesített osztályozást, mint a halmaz egy particióját. Ez az állítás algebrai strukturoidokra már nem érvényes. Egyszerű ellenpélda a következő: S legyen az 1, 2, 3 és 4 számok halmaza. S-en egy részleges művelet, $f(x)$ van értelmezve. $f(x)$ értelmezési tartománya 1, 2 és $f(1)=2$, $f(2)=3$. Legyen Θ az a kongruenciareláció, melynél csupán $1\equiv 4$, s Φ pedig, mely 2-t és 4-et ejti egybe. Ha Θ-t és Φ-t mint kongruenciarelációkat egyesítjük, akkor mind a négy elem egy osztályba kerül, míg Θ és Φ mint partíciók egyesítésénél 1, 2 és 4 kerül az egyik osztályba, s 3 önmagában alkotja a másik osztályt.

A következő állítás azonban igaz.

6. LEMMA: *Az S algebrai strukturoid kongruenciarelációi hálót alkotnak. Ez a háló izomorf az S halmaz partició hálójának valamely metszet részhálójával.*

BIZONYÍTÁS: Feleltessük meg mindegyik kongruenciarelációnak az általa létesített osztályozást, mint particiót. Akárhány ilyen partició particióelméleti metszete újból kompátibilis osztályozás lesz, mert ha a és b egy osztályban vannak, s valamely $\varphi(x)$ részleges művelet (az 1. lemma érvényes természetszerűleg algebrai strukturoidokra is, ezért tehetjük fel, hogy csak egyváltozós részleges algebrai műveletek vannak) értelmezve van a és b-n is, akkor $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ azonos osztályban volt már mindegyik kiindulásul vett particiónál is, így ezek komplett metszeténél is.

Így tehát tetszőleges sok kongruenciarelációnak létezik komplett metszete s ez megegyezik a megfelelő particióelméleti metszettel. Mivel a kongruenciarelációk összességének nyilván van legkisebb és legnagyobb eleme (lásd [1], 49. oldal), valóban hálót alkotnak. Ez egyúttal a kívánt izomorfizmust is szolgáltatja.

Az 1. tétel természetszerűleg érvényes algebrai strukturoidokra is, vagyis kimondható a következő állítás:

7. LEMMA: *Minden S algebrai strukturoidhoz található olyan T algebrai strukturoid, hogy $\Theta(S)\cong\Theta(T)$ és $\Theta(T)$ minden alulról elérhetetlen eleme minimális.*

Az 5. lemma algebrai strukturoidokra élesebben fogalmazható meg:

8. LEMMA: *Legyen S véges algebrai strukturoid s $\Theta_\alpha \leqq \Phi_\alpha$ S-nek nem zéró kongruenciarelációi. Ekkor található olyan T algebrai strukturoid, hogy $\Theta(T)$ izomorf $\Theta(S)$-nak $\bigvee_\alpha^{\cup} \Theta_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorf képével. Ha S véges, akkor T is feltehető végesnek.*

BIZONYÍTÁS: A 7. lemma szerint minden alulról elérhetetlen kongruenciareláció minimális, így alkalmas $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ elemekkel $\Theta_\alpha = \Theta_{a_\alpha, b_\alpha}$, $\Phi_\alpha = \Theta_{c_\alpha, d_\alpha}$. Definiáljuk a f_α részleges algebrai műveleteket: f_α értelmezési tartománya a_α és b_α, továbbá $f_\alpha(a_\alpha) = c_\alpha, f_\alpha(b_\alpha) = d_\alpha$. Ezen részleges algebrai műveleteket hozzácsatolva $M(S)$-hez kapjuk $M(T)$-t. Az 5. lemma bizonyításához hasonlóan látható be, hogy T eleget tesz a 8. lemma feltételeinek. Az 5. lemmával szemben az egyetlen különbség, hogy új elemet nem kellett definiálnunk s így T-nek új kongruenciarelációja nincsen, tehát $\Theta(S)$-nek $\bigvee_\alpha^{\cup} \Theta_{\Theta_\alpha, \Phi_\alpha}$ szerinti egyesítés homomorf képe nem részhálója $\Theta(T)$-nek, mint az 5. lemmában, hanem egyenesen izomorf vele.

Ezen előkészületek után már könnyen bizonyíthatjuk a paragrafus főeredményét:

3. TÉTEL: *Minden véges háló egy alkalmas véges algebrai strukturoid kongruenciareláció hálójával izomorf.*

BIZONYÍTÁS: Minden véges háló egy alkalmas véges Boole-algebra egyesítés homomorf képe, továbbá minden véges Boole-algebra valamely véges algebrai strukturoid kongruenciareláció hálójával izomorf. Végül minden egyesítés homomorfizmus minimális egyesítés homomorfizmusok egyesítése. Ezen állításokat összevetve a 8. lemma állításával adódik a 3. tétel.

A 6. lemma és a 3. tétel kombinációja a következő:

KOROLLÁRIUM: *Minden véges háló izomorf egy véges partició háló alkalmas metszet részhálójával.*

Megjegyezzük, hogy azt már O. ORE [5] bebizonyította, hogy minden véges háló izomorf egy véges partició háló alkalmas egyesítés részhálójával. Azonban a partició háló (ha több, mint háromelemű halmazon van értelmezve) nem önduális, így Ore tételéből nem nyerhető a fenti korollárium.