SZÁSZ GÁBOR EGY TÉTELÉRŐL

Írta: GRÄTZER GY. és SCHMIDT E. T.

Az alábbiakban SZÁSZ GÁBOR [2] dolgozatának 8. tételére adunk új bizonyítást.

A szóbanforgó tétel eredeti alakja — mely az 1. pontban változatlanul szerepel — a *Birkhoff—Menger*-féle direkt tényezőkre ró ki feltételeket. Felmerül a kérdés, vajon nem lehetne-e egyenesen a hálóra adni meg feltételt. A kérdésre igenlő választ ad a 2. tétel.

1. SZÁSZ GÁBOR, a tételt előkészítendő, [2]-ben öt segédtételt mond ki, melyek nagyobbrészt G. BIRKHOFF, továbbá WHITNEY, MACLANE és DILWORTH eredményeit foglalják össze. Az első három segédtételt kis változtatásokkal megismételjük; a függetlenség fogalmára, s az erre vonatkozó eredményeket összegező két utolsó segédtételre nem lesz szükségünk.

1. SEGÉDTÉTEL (BIRKHOFF—MENGER): *Minden véges, komplementumos, moduláris háló, L, egyértelműen felírható az*

$$L = P_0 \times P_1 \times \cdots \times P_n \tag{1}$$

alakban, ahol P_0 Boole-algebra és a P_i-k ($i = 1, 2, \ldots, n$) egyszerű (komplementumos, moduláris), nem disztributív hálók.

2. SEGÉDTÉTEL: *Véges, egyszerű, komplementumos moduláris háló minden (fő) ideálja is egyszerű háló.*

([2]-ben a fenti helyett a következő állítás szerepel: az L véges, komplementumos, moduláris háló akkor és csak akkor egyszerű, ha bármely két különböző atomhoz, p és q-hoz van egy olyan harmadik atom, r, hogy $r < p \cup q$. Mivel ez a tulajdonság, ha egy hálóra teljesül, akkor minden ideáljában is fennáll, ezért ebből az állításból triviálisan adódik a fenti 2. segédtétel.)

3. SEGÉDTÉTEL: *Az L 0-elemes, véges, moduláris háló $[a, b]$ intervallumának hosszát (azaz maximális láncainak hosszát) jelölje $\delta(a, b)$, s legyen $\delta(0, a) = \delta(a)$. $\delta(a) = 0$ akkor és csak akkor, ha $a = 0$, és fennáll a következő identitás:*

$$\delta(a \cap b, a) = \delta(b, a \cup b). \tag{2}$$

Ezekután fogalmazzuk meg SZÁSZ GÁBOR tételét.

1. tétel. *Legyen L 0 és 1 elemes, véges, komplementumos, moduláris háló. L-ben akkor és csak akkor található nem disztributív, ötelemű, 0 és 1-et tartalmazó részháló, ha az* (1) *felbontásban P_0 egyelemű és mindegyik P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ páros hosszúságú.*

MEGJEGYZÉS: A kívánt részháló létezése a következő egyenletrendszer megoldhatóságát jelenti:

$$x \cap y = y \cap z = z \cap x = 0, \quad x \cup y = y \cup z = z \cup x = 1. \tag{3}$$

AZ 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Tetszőleges A algebrai strukturára igaz az az állítás, hogy egy egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg A-ban, ha valamely direkt előállítása minden direkt-tényezőjében megoldható. Továbbá hálók esetén az 1 és 0 elem direkt-felbontásbeli komponensei épp a direkt tényezők 1 és 0 elemei. Így beláttuk, hogy (3) L-beli megoldhatósága ekvivalens (3) minden P_j-beli $(j = 0, 1, \ldots, n)$ megoldhatóságával.

A P_0 Boole-algebrában, ha $0 < 1$, akkor (3) megoldhatósága egy nem disztributív részháló létezését jelentené, s ezért kell, hogy P_0 egyelemű legyen.

Tegyük fel, hogy (3) P_i-ben $(i > 0)$ megoldható. Ekkor

$$\delta(1) = \delta(0, 1) = \delta(0, x) + \delta(x, 1) = \delta(z, 1) + \delta(y, 0) = 2\delta(z, 1),$$

azaz P_i páros hosszúságú.

Elég a tétel bizonyításához már csak azt belátnunk, hogy ha L $2n$ hosszúságú, egyszerű, komplementumos, nem disztributív, moduláris háló, akkor L-ben (3) megoldható. Alkalmazzunk teljes indukciót n-re. $n = 1$-re az állítás triviális, mert a nem disztributivitás következményeképpen L-nek van három különböző atomja, p, q, r, melyek kielégítik (3)-at. Tegyük fel, hogy az állítást már minden $1 \leqq k < n$-re beláttuk. Legyen $a \in L$, $\delta(a) = 2n - 2$ s a' egy tetszőleges komplementuma a-nak. Nyilván $\delta(a') = 2$. Az $(a]$ és $(a']$ főideálokban a 2. segédtétel és az indukciós feltétel következtében (2) megoldható, legyenek ezek a megoldások x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2. Állítjuk, hogy az $x = x_1 \cup x_2$, $y = y_1 \cup y_2$, $z = z_1 \cup z_2$ elemek megoldásai (3)-nak L-ben. Valóban, $x \cup y = x_1 \cup y_1 \cup x_2 \cup y_2 = a \cup a' = 1$ s ugyanígy $y \cup z = z \cup x = 1$; továbbá $\delta(x) = n$, mert $x_1 \cap x_2 = 0$ s ezért $\delta(x) = \delta(x_1 \cup x_2) = \delta(x_1) + \delta(x_2) = (n-1) + 1 = n$, s ugyanígy $\delta(y) = \delta(z) = n$. Ebből, $\delta(x \cap y, x) = \delta(y, x \cup y) = 2n - n = n$, azaz $\delta(x \cap y) = \delta(x) - \delta(x \cap y, x) = n - n = 0$, tehát $x \cap y = 0$, s ugyanígy $y \cap z = z \cap x = 0$, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

2. A BIRKHOFF—MENGER tétel bizonyítását legegyszerűbben a következő tétel segítségével nyerhetjük.

4. SEGÉDTÉTEL: *Legyen L komplementumos, moduláris háló. Ez esetben*

a) (NEUMANN) $L=(a]\times(a']$ *akkor és csak akkor, ha a-nak pontosan egy komplementuma van;*

b) (BIRKHOFF) *feltéve L végességét, L akkor és csak akkor egyszerű, ha nincsen egyértelműen komplementumos eleme.*

Ezen tétel segítségével az 1. tételt olyan alakra hozhatjuk, amely csak magára a hálóra köt ki feltételt.

2. tétel. *Legyen L 0 és 1 elemes* $(0<1)$ *véges, komplementumos, moduláris háló. L-nek akkor és csak akkor van 0 és 1-et tartalmazó, nem disztributív, ötelemű részhálója, ha minden egyértelműen komplementumos eleme páros magasságú.*

BIZONYÍTÁS: Legyen L véges, komplementumos és moduláris. Ha az $(a]$ és $(b]$ főideálok mint hálók disztributivak, a és b egyértelműen komplementumosak, akkor az $(a\cup b]$ főideál mint háló disztributív, s $a\cup b$ egyértelműen komplementumos. Ezért van egy maximális u_0 elem L-ben, amely egyértelműen komplementumos és melyre $(u_0]$ mint háló disztributív. Jelölje $u_i (i=1,\dots,n)$ azon minimális egyértelműen komplementumos elemeket, melyekre $(u_i]$ nem disztributív. A 4a) segédtételből triviálisan $L=(u_0]\times(u_1]\times\times\cdots\times(u_n]$, továbbá a 4b) segédtételből mindegyik $(u_i]$ $(i=1,2,\dots,n)$ mint háló egyszerű. A tényezők sorrendjének alkalmas megválasztásával nyilván elérhető, hogy $P_j=(u_j]$ $(j=0,1,\dots,n)$, ahol P_j az 1. segédtételbeli felbontás tényezőit jelöli. A keresett szükséges és elegendő feltétel tehát az 1. tétel szerint $P_0=1$ és a P_i-k $(i=1,\dots,n)$ hosszának párossága. Belátjuk, hogy ez ekvivalens az egyértelműen komplementumos elemek páros magasságával. Valóban, ha minden egyértelműen komplementumos elem páros magasságú, akkor speciálisan minden u_i-re $(i=1,2,\dots,n)$ is teljesül ez, így P_i $(i=1,2,\dots,n)$ páros hosszúságú. Ha $u_0\neq 0$, akkor legyen p egy atom, melyre $p\leqq u_0$. Nyilván p is egyértelműen komplementumos (mert p egyértelműen komplementumos $(u_0]$-ban) s $\delta(p)=1$, ellentmondás, tehát $u_0=0$. Megfordítva, ha $u_0=0$ és $\delta(u_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ páros, akkor minden a egyértelműen komplementumos elem $a=\bigcup_{j=1}^{m} u_{i_j}$ alakú, s ezért $\delta(a)=\sum_{j=1}^{m}\delta(u_{i_j})$ szintén páros, befejezvén a bizonyítást.

1. MEGJEGYZÉS: Az 1. segédtételt BIRKHOFF és MENGER erősebb alakban mondták ki, nevezetesen még azt is állították, hogy a P_i-k $(i=1,2,\dots,n)$ alkalmas n_i-dimenziós projektív tér altérhálójával izomorfok. Ha ezt az állítást is belevesszük az 1. segédtételbe, akkor a 2. segédtétel elhagyható ugyanis P_i egy főideálja éppen egy alkalmas altér összes alterének hálójával

izomorf, vagyis maga is egy projektív geometria altérhálója, s mint ilyen, egyszerű.

2. MEGJEGYZÉS: Bizonyos végtelen komplementumos moduláris hálókban is megoldható (3). Könnyű pl. verifikálni, hogy Neumann „folytonos geometriá"-jában is megoldható (3), s természetesen $\delta(x) = \delta(y) = \delta(z) = \frac{1}{2}$.

IRODALOM

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice theory, *New York, 1948.*

[2] SZÁSZ G.: Komplementumos hálók szerkezetéről, *MTA III. Osztályának Közleményei* **9** (1959), 57—79.

(Beérkezett: 1958. VI. 20.)

A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézete