# Funkcionálanalízis, Gyakorló feladatsor

(1) Jelölje $C^1[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett komplex értékű folytonosan differenciálható függvények terét, és $f, g \in C[0,1]$ esetén legyen

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f'(x)} g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

(a) Igaz-e, hogy $\langle ., . \rangle$ belső szorzat?

(b) Legyen $\mathcal{F} = \{f \in C^1[0,1] : f(0) = 0\}$. Igaz-e, hogy $\langle ., . \rangle$ belső szorzat az $\mathcal{F}$ téren?

(2) $z \in \mathbb{C}$-re adott az $e_z \in l^2(\mathbb{N})$ vektor:

$$e_z = \left(1, z, \frac{z^2}{\sqrt{2!}}, \dots, \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \dots\right)$$

Számoljuk ki az $\langle e_z, e_w \rangle$ belső szorzatot, és határozzuk meg az $\{e_t : t \in \mathbb{R}\}^\perp$ halmazt!

(3) Milyen $\alpha, \beta$ esetén minimális az

$$\int_0^{2\pi} (\cos^2 x - \alpha \sin 2x - \beta \cos 2x)^2 dx$$

integrál?

(4) Legyen $\delta_1, \delta_2, \dots$ az $l^2$ tér kanonikus bázisa, és $A\delta_n = \delta_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$. Adjuk meg az $A$ operátor normáját! Konvergál-e $A^k$ az *so* vagy a *wo* topológiában?

(5) Legyen $T : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ a következőképpen definiált leképezés:

$$(Tf)(x) := x^2 f(x).$$

Bizonyítsa, hogy

$$S := (2I - T)^{-1}$$

folytonos lineáris operátor!

(6) Adjuk meg az alábbi $A_i : C[-1,1] \to C[-1,1]$ leképezések spektrumát (osztályozva), és normáját

$$(A_1 f)(x) = (-x^2 + x + 1) f(x), \qquad (A_2 f)(x) = (x + |x|) f(x).$$

(7) Legyen $A$ önadjungált operátor egy $\mathcal{H}$ Hilbert téren, és $z = a + ib$, $b \neq 0$. Igazoljuk, hogy ekkor az

$$(A + zI)(A + \overline{z}I)^{-1}$$

operátor unitér.

(8) Definiáljuk $L^2(\mathbb{R})$-en a $T$ operátort a következő formulával: $(Tf)(x) := f(-x)$.

*a*) Igazoljuk, hogy $T$ önadjungált unitér operátor.

*b*) Adjuk meg a $\operatorname{Ker}(I - T)$ és $\operatorname{Rng}(I - T)$ altereket!

*c*) Igazoljuk, hogy $\operatorname{Rng}(I - T) = \operatorname{Ker}(I + T)$ és $\operatorname{Rng}(I + T) = \operatorname{Ker}(I - T)$.

*d*) Igazoljuk, hogy $P_1 := \frac{1}{2}(I - T)$ és $P_2 := \frac{1}{2}(I + T)$ ortogonális projekciók, és $I = P_1 + P_2$.

(9) Legyen $B = P_1 - P_2$, ahol $P_1$ és $P_2$ egymásra merőleges projekciók egy Hilbert térben. Mi $B$ spektruma (osztályozva)?