Funkcionálanalízis, Gyakorló feladatsor

(1) Legyen A, B és C 2×2-es mátrix, továbbá $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy ha az

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

mátrixra $X^2 = X$ teljesül, akkor $BAB = BCB = 0$ is teljesül.

(2) Legyen $f_t(x) := e^{tx}$. Bb., hogy $\{f_t : t \in \mathbb{R}\}$ lineárisan független rendszer az $\mathbb{R}$-en értelmezett végtelen sokszor differenciálható valós értékű függvenyek vektorterében!

(3) Legyen $v_1, v_2, v_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$v_1(x) := \cos^2 \frac{x}{2}, \qquad v_2(x) := \sin^2 \frac{x}{2}, \qquad v_3(x) := \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

a) Igazoljuk, hogy $\{v_1, v_2, v_3\}$ bázis a $[0, 2\pi]$ intervallumon legfeljebb elsőfokú trigonometrikus polinomok

$$\mathcal{T}_1 := \{a + b \sin x + c \cos x : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

terében.

b) Legyen X_1 a v_2 és X_2 a v_1 és v_3 polinomok által kifeszített altér. Írjuk fel az X_2 altérre való, X_1 altérrel párhuzamos vetítés tükrözés mátrixát a

$$q_1(x) := 1; \qquad q_2(x) := \sin x; \qquad q_3(x) := \cos x$$

bázisban!

(4) Legyen V 2 dimenziós vektortér az x, y báziselemekkel, és definiáljuk az $R : V \otimes V \to V \otimes V$ lineáris transzformációt a következő módon:

$$\begin{aligned} R(x \otimes x) &= x \otimes x, & R(x \otimes y) &= q \cdot y \otimes x, \\ R(y \otimes x) &= q \cdot x \otimes y + (1 - q^2) \cdot y \otimes x, & R(y \otimes y) &= y \otimes y. \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy $R^2 = (1 - q^2)R + q^2 \mathrm{id}_{\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}}$.

(5) Adjuk meg az $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $f(X) := \mathrm{Tr} \sin X$ deriváltját.

(6) Legyen X a $[-1,1]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények tere. Legyen

$$\|f\| = |f(1) - f(-1)| + \sup\{|f'(x)| : -1 < x < 1\}.$$

Igaz-e, hogy $\|.\|$ norma az X téren?

(7) Tekintsük a $\|.\|_p$ normákat $\mathbb{C}^n$-en ($1 \leq p \leq \infty$).

(a) Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$!

(b) Keressünk $1 \leq p, r \leq \infty$ esetén c_1 és c_2 pozitív valós számokat, melyekre minden $x \in \mathbb{C}^n$ esetén

$$\|x\|_p \leq c_1\|x\|_r \leq c_2\|x\|_p$$

(8) Igazoljuk, hogy az $L^2[0,1]$térben sűrűn vannak azon polinomok, melyek 1/2-ben 0 értéket vesznek fel. Igaz-e ez a $C[0,1]$ térben?

(9) Mi lesz az

$$Af(x) := \int_0^x f(y)\ \mathrm{d}y$$

képlettel definiált operátor normája a $C[0,1]$ illetve az $L^1[0,1]$ téren?

(10) Legyen $1 < p < \infty$ és $\varphi : L^p[-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f \mapsto \varphi(f) = \int_{-1}^1 x^3 f(x)\ \mathrm{d}x$$

funkcionál. Számoljuk ki $\|\varphi\|$-t!

(11) Legyen az X tér a $\|.\|_{(1)}$ és $\|.\|_{(2)}$ normákkal is Banach-tér. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik olyan $K \geq 0$ szám, hogy

$$\|x\|_{(1)} \leq K\|x\|_{(2)}$$

minden $x \in X$ esetén teljesül, akkor létezik olyan $K' \geq 0$, hogy

$$\|x\|_{(2)} \leq K'\|x\|_{(1)}.$$