SZAKDOLGOZAT

Határeloszlás-tételek urnamodellekben

Írta:
Rudas Anna

Témavezető: Tóth Bálint
egyetemi tanár

Matematikai Intézet,
Sztochasztika Tanszék

BME
2003.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A dolgozatban vizsgált sztochasztikus folyamatról

A [3, 1. fejezet]-ben olvashatjuk, hogy az egyik legelterjedtebb diszkrét idejű sztochasztikus populációgenetikei modell, egyszerűsége miatt és esetleges biológiai irrelevanciája ellenére is, a Wright - Fisher modell. Ezt (a biológiai színezetet elhagyva) urnamodellként írjuk le, majd az „alapmodell” vizsgálata után különböző változtatásokkal élünk, és a kapcsolódó Markov-folyamatok viselkedését vizsgáljuk az $N \to \infty$ határesetben (N a dobozban található golyók száma).

Az alapmodell. Egy dobozban van N golyó, kétféle színből. Diszkrét időlépésenként a következőt tesszük: N-szer húzunk a dobozból függetlenül, visszatevéssel, és minden egyes húzáskor amilyen színű golyót húztunk, egy olyan színű golyót beteszünk egy üres dobozba. Amikor az új doboz megtelt (a benne lévő golyók száma N lett), eldobjuk az előző dobozt, a következő dobozt pedig ugyanúgy töltjük fel a jelenlegi alapján, mint ahogy ezt kaptuk az előzőből.

Változatok.

1. Előre rögzített valószínűségekkel a kihúzott golyó színétől függően teszünk valamilyen színű golyót az új dobozba, nem feltétlenül ugyanolyan szín kerül tehát be, mint amilyet húztunk,

2. A színek száma d,

3. Nem egy kihúzott golyó alapján döntünk a beteendő golyó színéről, hanem 2 független húzás alapján. Ilyenkor a megváltoztatási valószínűség a kihúzott golyók színeinek halmazától függ, a kihúzás sorrendjétől nem.
   Megjegyzés: Mivel a rögzített színszám melletti $N \to \infty$ eset érdekel majd bennünket, és ott nem számít az, hogy a 2 golyó kihúzását visszatevéssel vagy anélkül végezzük, ezért rögzített N mellett is a visszatevéses húzást választjuk (a számolások egyszerűsége kedvéért).

Kérdések. A vizsgálat tárgya minden esetben az $N \to \infty$ határeset.

Adott d színszám és r húzási szám mellett minden $N \in \mathbb{N}$-hez definiálni fogjuk az $X_k^{(N)}$ Markov-láncot, melyben $X_k^{(N)}$ értéke a k-adik dobozban lévő színösszetételt reprezentálja egy $(d-1)$-dimenziós vektor formájában: i-edik koordinátája

$$X_k^{(N)}[i] = \frac{\#\{i\text{-edik színű golyók a } k\text{-adik dobozban}\}}{N},$$

a d-edik szín aránya a koordináták összegét 1-re egészíti ki.

Minden esetben hasznos bevezetni az ún. *fixpont* fogalmát. Ez olyan vektort jelent, amelyből várható értékben nem mozdulna el a folyamat. Természetesen N végessége miatt előfordul, hogy egy elméleti fixpont nem lehetséges állapota az adott Markov-láncnak, hanem csak az $N \to \infty$ határesetben érhető el.

A dolgozat fejezeteiben a különböző alapvető viselkedési formákat mutatjuk be, amely viselkedési formákat aszerint találunk, hogy az adott paraméterek mellett milyen halmazt alkotnak a fixpontok.

Egyetlen fixpont. Ha egyetlen fixpont van, x^*, akkor a folyamat minden N-re, akárhonnan indítva, véges időn belül 1 valószínűséggel a közelébe érkezik. Ha az előzőhöz hasonlóan folytonosítanánk a folyamatot, akkor a fixpont $1/\sqrt{N}$ közelébe való beérkezési idő $O(logN/N)$ lenne, utána az eltérés csak $1/\sqrt{N}$ nagyságrendű, tehát a határfolyamat nem volna érdekes. Ehelyett azt tesszük, hogy a folyamatot x^* közeléből indítjuk, és a k-adik időben az x^*-tól való eltérés $\sqrt{N}$-szeresét vizsgáljuk:

$$\xi_k^N := \sqrt{N}\left(X_k^{(N)} - x^*\right).$$

Ennek $N \to \infty$ határfolyamatát írja le különböző esetekben a 2. fejezet.

Minden pont fix. Ha minden pont fix, akkor definiáljuk az $X_t^{(N)}$ folytonos idejű folyamatot az

$$X_t^{(N)} := X_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)}$$

képlettel: ennek trajektóriái a $[0,1]$-en balról folytonos függvények $D[0,1]$ terének elemei. Feltételezzük, hogy az $X_t^{(N)}$ sorozat feszes a $D[0,1]$-en bevezetett Prohorov-topológia (ld. [2, 1.6. fejezet]) szerint, és így minden részsorozatából kiválasztható gyengén konvergens rész-részsorozat: $X_t^{(N_j)} \Rightarrow X_t$. Ezen X_t vizsgálatát tartalmazza a 3. fejezet: a martingálprobléma eszközét használva kiderül, hogy a határfolyamat egyértelmű.

A fixpontok halmaza különbözik a fentiektől. Ha a fixpontok halmaza se nem egyetlen pont, se nem az egész értékkészlet (ilyen eset csak legalább 3 szín esetén lép fel), akkor ha 3 szín van, és 1-et húzunk, akkor a halmaz egy egyenes, 3 szín és 2 húzás esetén pedig egy másodfokú görbe. Kétféle mozgást vizsgálunk: szétválasztjuk a „görbe (ill. egyenes) menti mozgást” és a „görbétől (ill. egyenestől) való eltérést”. Kiderül, hogy ezek időlépése nem összemérhető, a görbétől való eltérés változása fél nagyságrenddel gyorsabb: ha azt a határfolyamatot nézzük, amelyben a görbe menti mozgás vizsgálható, abban a görbétől való eltérés nullává zsugorodik, ha pedig lelassítjuk az időt annyira, hogy a görbétől való eltérést láthassuk, akkor a görbe menti mozgás szűnik meg. Erről szól a 4. fejezet.

1.2. Eszközeinkről

1.2.1. A martingál-problémáról

A következő rövid összefoglaló [1] alapján készült.

Legyen X_t egy folytonos, időben homogén Markov-folyamat, mely az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált, értékeit pedig vegye fel $\mathbb{R}^d$-ben. Ekkor, ha bármilyen $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ függvényre

$$\mathbb{E}\left(\phi(X_{t+h}) - \phi(X_t) \mid \mathcal{F}_t\right) = hL\phi(X_t) + o(h), \quad h \to 0, \tag{1}$$

akkor L másodrendű differenciáloperátor, mely a következő alakú:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \mathbf{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} \mathbf{b}_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

itt $\mathbf{a}\colon \mathbb{R}^d \to S_d$ és $\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ korlátos, mérhető függvények (S_d a $(d \times d)$-es, valós elemű szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrixok tere).

Ilyenkor az X_t folyamatra kis $h > 0$ esetén igaz[1], hogy

$$\mathbb{E}(X_{t+h}[i] - X_t[i] \mid \mathcal{F}_t) = h\mathbf{b}_i(X_t) + o(h),$$

és

$$\mathbb{E}\left((X_{t+h}[i] - X_t[i])(X_{t+h}[j] - X_t[j]) \mid \mathcal{F}_t\right) = h\mathbf{a}_{ij}(X_t) + o(h),$$

vagy másképp fogalmazva $X_{t+h} - X_t$ kis $h > 0$ esetén Gauss-féle növekményű folyamat $\mathbf{b}$ „sodródási-” (*drift-*) vektorral és $\mathbf{a}$ infinitezimális kovarianciamátrixszal, vagyis (az Itô-féle formalizmusban írva)

$$\mathrm{d}X_t = \boldsymbol{\sigma}(X_t)\mathrm{d}B_t + \mathbf{b}(X_t)\mathrm{d}t,$$

ahol $\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T$, B_t pedig d-dimenziós standard Brown-mozgás.

[1](1)-ből könnyen levezethető, ϕ megfelelő választásaival

Kövessük végig az alábbi levezetést! Legyen $0 \leq s \leq t$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, ekkor (1) alapján

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}(\phi(X_t) \mid \mathcal{F}_s) &= \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\phi(X_{t+h}) - \phi(X_t) \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s\} = \\ &= \lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}\{hL\phi(X_t) + o(h) \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}(L\phi(X_t) \mid \mathcal{F}_s),\end{aligned}$$

így a fenti egyenletet s-től t-ig integrálva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\phi(X_t) - \phi(X_s) - \int_s^t L\phi(X_u)\mathrm{d}u \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) = 0,$$

másképp fogalmazva

$$M_t := \phi(X_t) - \int_0^t L\phi(X_u)\mathrm{d}u \tag{2}$$

M_t martingál $\mathcal{F}_t$-re nézve.

A martingál-probléma azt vizsgálja, hogy (2) milyen esetekben jellemzi egyértelműen X_t-t. Milyen feltételek mellett igaz, hogy adott $\mathbf{a}\colon \mathbb{R}^d \to S_d$ és $\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ korlátos, mérhető függvényekre a kezdeti feltételtől eltekintve egyértelműen létezik X_t Markov-folyamat, amire (2) martingál az X_t természetes filtrációjára nézve?

Esetünkben elég lesz annyi, amennyit [1, 6.3.4. tétel] állít: speciálisan ha teljesül az alábbi Lipschitz-feltétel:
$(\exists A > 0)(\forall x, y \in \mathbb{R}^d)$-re

$$\|\boldsymbol{\sigma}(x) - \boldsymbol{\sigma}(y)\| + |\mathbf{b}(x) - \mathbf{b}(y)| \leq A|x - y|, \tag{3}$$

akkor az $\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^T$ és $\mathbf{b}$ függvényekkel definiált martingál-problémának létezik és egyértelmű az X_t megoldása.

1.2.2. Adott diffúzióhoz való konvergencia bizonyításának módszere, a martingál-probléma használatával

A 3. fejezet alfejezeteiben definiálni fogunk $X_t^{(N)}$ folymatokat minden $N \in \mathbb{N}$-re, és feltesszük, hogy az $X_t^{(N)}$ sorozat feszes a Prohorov-topológiával[2] ellátott $D[0,1]$-ben (a $[0,1]$-en jobbról folytonos függvények terében), tehát

[2] ld. [2, 1.6. fejezet]

bármely részsorozatából kiválasztható gyengén konvergens rész-részsorozat. Ha belátjuk, hogy a határfolyamat egyértelmű, akkor ebből már következik $X_t^{(N)}$ gyenge konvergenciája (ld. [2, 2.6. tétel]). A határfolyamatot X_t-nek nevezve tehát erre szeretnénk belátni, hogy egyértelmű megoldása a Wright - Fisher egyenlet együtthatói által definiált martingál-problémának. Az együtthatók: $\mathbf{b}(x) = 0$ és

$$\boldsymbol{\sigma} \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\sigma}(x) = \sqrt{x(1-x)}.$$

A (3) Lipschitz-feltétel a $[0,1]$ intervallum bármely kompakt, valódi részhalmazán teljesül, a feladatot tehát először definiáljuk rögzített $\delta > 0$ mellett a $[\delta, 1-\delta]$ intervallumon, ott a megoldás egyértelműen létezik, majd elvégezzük a $\delta \to 0$ határátmenetet.

Az X_t határfolyamatról így azt kell belátnunk, hogy bármilyen $f \in C^2([0,1])$ függvény esetén

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2} X_u(1-X_u) f''(X_u) \mathrm{d}u \tag{4}$$

martingál $\mathcal{F}_t$-re, az X_t folyamat természetes filtrációjára nézve, ezzel igazoljuk, hogy X_t a kezdeti eloszlástól eltekintve egyértelmű megoldása a martingál-problémának.

A (4) összefüggés másképp úgy fogalmazható, hogy minden $t, s > 0$ számra

$$\mathbb{E}\left(f(X_{t+s}) - f(X_t) - \int_t^{t+s} \frac{1}{2} X_u(1-X_u) f''(X_u) \mathrm{d}u \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right) = 0. \tag{5}$$

A 3.2. fejezetben azt bizonyítjuk be, hogy

$$M_t^{(N)} := f(X_t^{(N)}) - f(X_0^{(N)}) - \int_0^t \frac{1}{2} X_u^{(N)}(1-X_u^{(N)}) f''(X_u^{(N)}) \mathrm{d}u$$

egy valószínűségben N növekedésével eltűnő ($\mathrm{O}(N^{-1/2})$) tagtól eltekintve martingál, tehát

$$\mathbb{E}\left(f(X_{t+s}^{(N)}) - f(X_t^{(N)}) - \int_t^{t+s} \frac{1}{2} X_u^{(N)}(1-X_u^{(N)}) f''(X_u^{(N)}) \mathrm{d}u \;\middle|\; \mathcal{F}_t^{(N)} \right) = \mathrm{O}(N^{-1/2}).$$

Ebből az alábbiak szerint következik az állítás:

A

$$\psi_f\big((X^{(N)})_t^{t+s}\big) := f(X_{t+s}^{(N)}) - f(X_t^{(N)}) - \int\limits_t^{t+s} \frac{1}{2} X_u^{(N)}(1 - X_u^{(N)}) f''(X_u^{(N)}) \mathrm{d}u$$

definícióval minden $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$-re ψ_f folytonos funkcionál, ezért (tudva azt, hogy $X_t^{(N)} \Rightarrow X_t$) a gyenge konvergencia definíciójának értelmében bármilyen ϕ folytonos (korlátos) funkcionálra

$$\mathbb{E}\left(\phi\left((X^{(N)})_0^t\right)\psi_f\left((X^{(N)})_t^{t+s}\right)\right) \to \mathbb{E}\left(\phi\left((X)_0^t\right)\psi_f\left((X)_t^{t+s}\right)\right),$$

tehát, ha a baloldalról látjuk, hogy 0-hoz tart, akkor a jobboldal 0 kell, hogy legyen, amivel (5) igazolást nyer. A baloldal pedig

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\phi\left((X^{(N)})_0^t\right)\psi_f\left((X^{(N)})_t^{t+s}\right)\right) &= \\ \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\phi\left((X^{(N)})_0^t\right)\psi_f\left((X^{(N)})_t^{t+s}\right) \;\Big|\; \mathcal{F}_t^N\right)\right) &= \\ = \mathbb{E}\left(\phi\left((X^{(N)})_0^t\right)\mathrm{O}(N^{-1/2})\right) &= \mathrm{O}(N^{-1/2}).\end{aligned}$$

2. Diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamat és arra vezető esetek

2.1. 2 szín, 1-et húzunk

2.1.1. Jelölésrendszer

Ha piros golyót húzunk, akkor annak valószínűsége, hogy mégis kéket teszünk be, legyen u, ha pedig kéket húzunk, akkor annak valószínűsége, hogy mégis pirosat teszünk, v. Legyen $Z_k^{(N)}$ az k-adik dobozba az N húzás során betett piros golyók száma, és $X_k^{(N)} = \frac{1}{N} Z_k^{(N)}$ a kialakult arány. Fixpontnak nevezzük az olyan $0 \leq x^* \leq 1$ számokat, amelyekből indítva a folyamatot, várható értékben nem mozdulna el az arány (de N végessége miatt $X_k^{(N)}$-nak x^* nem biztos, hogy lehetséges állapota). Amint $N \to \infty$, x^*-hoz tetszőlegesen közeli pontból indíthatunk, a továbbiakban mindig ezt tesszük.

2.1.2. Paramétertartomány

A k-adik időpontban beállt $X_k^{(N)}$ arány ismeretében a $(k+1)$-edik doboz feltöltése N lépésben történik. Egy lépésben annak valószínűsége, hogy a betett golyó piros,

$$(1-u)X_k^{(N)} + v(1 - X_k^{(N)}) = (1-u-v)X_k^{(N)} + v,$$

tehát a $(k+1)$ időpontbeli arány várható értéke is ennyi. Ennek megfelelően a fixpontegyenlet

$$x^* = (1-u-v)x^* + v,$$

így vagy minden pont fix (ha $u = 0$, $v = 0$), és akkor a 3. fejezetben ismertetett esetben vagyunk, vagy egyetlen fixpont van: $x^* = \frac{v}{u+v}$, ebben a fejezetben ezt az esetet tárgyaljuk.

2.1.3. A vizsgálat tárgya, eredménye

A k időpontbeli arány, $X_k^{(N)}$, az x^* fixpont közelében marad, az eltérés $\frac{1}{\sqrt{N}}$ nagyságrendű. Ennek megfelelően a $\xi_k^{(N)} := \sqrt{N}(X_k^{(N)} - x^*)$ valószínűségi változó viselkedése a vizsgálat tárgya. A folyamatot indítsuk x^* közeléből, azaz rögzítsük x_0-t, $|x_0 - x^*| \leq 1/N$, és legyen $X_0^{(N)} = x_0$.

Bebizonyosodik, hogy

1. Tétel. A $\xi_k^{(N)}$, $k \in \mathbb{N}$ fent definiált diszkrét idejű sztochasztikus folyamat $N \to \infty$ esetén gyengén (eloszlásban) konvergál a ξ_k, $k \in \mathbb{N}$ diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamathoz, melyet a következő képlet definiál:

$$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_{k+1} = \alpha\xi_k + \beta Y_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Itt $\alpha = 1 - u - v$, $\beta = \sqrt{x^*(1-x^*)}$, (vegyük észre, hogy $|\alpha| < 1$), Y_k-k pedig egymástól és minden ξ_k értékétől független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Bizonyítás. *A bizonyítás menete:* Belátjuk, hogy bármilyen véges k-ra

$$\xi_j^{(N)} = \alpha\xi_{j-1}^{(N)} + \beta Y_j^{(N)} + H_j^{(N)}, \quad \forall\, 1 \le j \le k$$

azaz $\left(\xi_j^{(N)}\right)_{j=1}^k$ az $\left(Y_j^{(N)}\right)_{j=1}^k$ és a $\left(H_j^{(N)}\right)_{j=1}^k$ folyamatok folytonos függvénye, ahol $\left(Y_j^{(N)}\right)_{j=1}^k \Rightarrow \left(Y_j\right)_{j=1}^k$, Y_j-k független standard normális eloszlású valószínűségi változók, a $H_j^{(N)}$ hibatagok pedig együttesen, valószínűségben tartanak 0-hoz. Mindezzel tehát bizonyítjuk, hogy $\left(\xi_j^{(N)}\right)_{j=0}^k \Rightarrow \left(\xi_j\right)_{j=0}^k$, ahol $\left(\xi_j\right)_{j=0}^k$ a megfelelő diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamat. Az állítás ebből következik a $\left(\xi_j^{(N)}\right)_{j=0}^\infty$ folyamatra, hiszen diszkrét idő esetén a véges dimenziós eloszlások konvergenciája egyértelműen meghatározza a folyamat határeloszlását.

A bizonyítás:

A feladatunkban szereplő $X_k^{(N)}$ és $\xi_k^{(N)}$ folyamatokat csatolt módon hozzuk létre, azaz új valószínűségi változókat értelmezünk ugyanezen a valószínűségi téren, és ezek segítségével definiáljuk az $X_k^{(N)}$ és $\xi_k^{(N)}$ folyamatokat olyan módon, hogy azok peremeloszlása a kívánt legyen, mégis többet mondhassunk róluk az őket definiáló változók segítségével.

Legyenek (rögzített N mellett) $U_{k,j}$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$ független valószínűségi változók egyenletes eloszlással a $[0,1]$ intervallumon, az $X_k^{(N)}$ folyamatot pedig definiáljuk a következőképpen:

$$X_0^{(N)} := H_0^{(N)}, \quad X_{k+1}^{(N)} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \rho_{k,i}^{(N)},$$

ahol

$$\rho_{k,j}^{(N)} := \mathbb{1}_{\{U_{k,j} < \alpha X_k^{(N)} + v\}},$$

$H_0^{(N)}$ pedig az x^*-hoz legközelebbi szám a $\{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$ halmazból. Legyen továbbá

$$\xi_k^{(N)} := \sqrt{N}(X_k^{(N)} - x^*).$$

Az így definiált $X_k^{(N)}$ és $\xi_k^{(N)}$ folyamatok eloszlása megyegyzik a feladatunkban szereplő megfelelő folyamatok eloszlásával, $\rho_{k,j}^{(N)}$ szemléletesen annak indikátora, hogy a k-adik dobozból j-edszerre húzva piros golyót teszünk a $(k+1)$-edik dobozba (ennek valószínűsége $(1-u)X_k^{(N)} + v(1 - X_k^{(N)}) = \alpha X_k^{(N)} + v$).

Vezessük be a

$$\tilde{\rho}_{k,j} := \mathbb{1}_{\{U_{k,j} < x^*\}}$$

változókat is, vegyük észre, hogy $\alpha X_k^{(N)} + v$ kevéssé tér el x^*-tól:

$$\alpha X_k^{(N)} + v = x^* + \alpha(X_k^{(N)} - x^*) = x^* + \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)}.$$

Ezek segítségével írhatjuk, hogy

$$\xi_{k+1}^{(N)} = \sqrt{N}(X_{k+1}^{(N)} - x^*) = \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - x^*)\right) =$$

$$= \alpha\xi_k^{(N)} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - x^* - \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)}) =$$

$$= \alpha\xi_k^{(N)} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{\rho}_{k,j} - x^*) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{\rho}_{k,j} - \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)}). \quad (6)$$

Belátjuk, hogy az összeg második tagja gyengén konvergál βY_{k+1}-hez, ahol Y_{k+1} standard normális eloszlású, és minden eddigi $X_j^{(N)}$ $(j \in \{0 \ldots k\})$ értékétől független valószínűségi változó, harmadik tagja pedig valószínűségben tart 0-hoz.

A második tag:
$\tilde{\rho}_{k,j}$-k független, azonos eloszlású valószínűségi változók, várható értékük x^*, szórásuk $\sqrt{x^*(1-x^*)} = \beta$, így

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{\rho}_{k,j} - x^*) = \beta\frac{\sum_{j=1}^{N}(\tilde{\rho}_{k,j} - x^*)}{\sqrt{N}\beta} \Rightarrow \beta Y_{k+1},$$

Y_{k+1} minden eddigitől független standard normális eloszlású valószínűségi változó.

A harmadik tag:
bármilyen $c > 0$ számra becsüljük felülről a következő feltételes valószínűséget:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)}-\tilde{\rho}_{k,j}-\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})\right| \geq c \;\Big|\; X_k^{(N)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{D}^2\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)}-\tilde{\rho}_{k,j}) \;\Big|\; X_k^{(N)}\right)}{c^2} = \frac{\mathbb{D}^2(\rho_{k,j}^{(N)}-\tilde{\rho}_{k,j} \mid X_k^{(N)})}{c^2} =$$

$$= \frac{(\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})}{c^2},$$

eszerint

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)}-\tilde{\rho}_{k,j}-\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})\right| \geq c\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left\{\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)}-\tilde{\rho}_{k,j}-\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})\right| \geq c \;\Big|\; X_k^{(N)}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\frac{(\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\xi_k^{(N)})}{c^2}\right), \quad (7)$$

ennek becslése pedig a következőképp történhet. Vezessük be az $S_k^{(N)} := \frac{1}{\sqrt{N}}\xi_k^{(N)} = X_k^{(N)} - x^*$ jelölést, erre igaz, hogy

$$S_{k+1}^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - x^* - \alpha S_k^{(N)}) + \alpha S_k^{(N)}, \quad (8)$$

$\rho_{k,j}^{(N)}$ várható értéke $\alpha X_k^{(N)} + v = x^* + \alpha S_k^{(N)}$, ebből $S_{k+1}^{(N)}$ várható értéke

$$\mathbb{E}(S_{k+1}^{(N)}) = \alpha\mathbb{E}(S_k^{(N)}) = \ldots = \alpha^{k+1}\mathbb{E}(S_0^{(N)}) = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

négyzetének várható értékéhez pedig (8) mindkét oldalát $S_{k+1}^{(N)}$-gyel szorozva, bevezetve a $Q_{k+1}^{(N)}$ jelölést a standard normális eloszlásúhoz gyengén konvergáló tagra, és kihasználva, hogy $\rho_{k,j}^{(N)}$ szórása $(x^*+\alpha S_k^{(N)})(1-x^*+\alpha S_k^{(N)})$, ez pedig konstannsal becsülhető felülről (x^* és $S_k^{(N)}$ is legfeljebb 1):

$$(S_{k+1}^{(N)})^2 = \alpha S_k^{(N)} S_{k+1}^{(N)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) Q_{k+1}^{(N)} S_{k+1}^{(N)},$$

amiből mindkét oldal várható értékét véve, és használva a Cauchy - Schwarz - Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}((S_{k+1}^{(N)})^2) \leq \alpha\sqrt{\mathbb{E}((S_k^{(N)})^2)}\sqrt{\mathbb{E}((S_{k+1}^{(N)})^2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\sqrt{\mathbb{E}((S_{k+1}^{(N)})^2)},$$

azaz

$$\sqrt{\mathbb{E}((S_{k+1}^{(N)})^2)} \leq \alpha\sqrt{\mathbb{E}((S_k^{(N)})^2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leq \ldots \leq$$
$$\leq \alpha^{k+1}\sqrt{\mathbb{E}((S_0^{(N)})^2)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

hiszen $|S_0^{(N)}| = O\left(\frac{1}{N}\right)$. Mindezzel tehát

$$\mathbb{E}((S_{k+1}^{(N)})^2) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ezek után a (7) egyenlőtlenséglánc tovább folytatható:

$$\mathbb{E}\left(\frac{(\alpha S_k^{(N)})(1-\alpha S_k^{(N)})}{c^2}\right) = \frac{\alpha}{c^2}\mathbb{E}\left(S_k^{(N)}\right) - \frac{\alpha^2}{c^2}\mathbb{E}\left((S_k^{(N)})^2\right) = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

azaz a (6) összeg harmadik tagja (a hibatag) valószínűségben tart 0-hoz.

A „nulladik" hibatag pedig az előre rögzített $H_0^{(N)}$ szám, amely legfeljebb $\frac{1}{2N}$ távolságra van x^*-tól, tehát $\left|\xi_0^{(N)}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{N}}$, ez is 0-hoz tart.

■

2.2. 2 szín, 2-t húzunk

2.2.1. Jelölésrendszer

Legyen a annak valószínűsége, hogy feltéve, hogy két piros golyót húztunk, pirosat is teszünk be. Ugyanígy b annak valószínűsége, hogy egy piros és egy kék húzása esetén, c pedig hogy két kék húzása esetén pirosat teszünk. Összefoglalva (x jelöli a piros, y a kék színt): $p_{xx,x} = a$, $p_{xy,x} = b$, $p_{yy,x} = c$.

Az előző fejezettel megegyezően használjuk a $\rho_{k,j}^{(N)}$ jelölést (az a valószínűségi változó, amely pontosan akkor 1, ha a k-adik dobozból j-edszerre való húzás alapján a $k+1$-edik dobozba tett golyó piros, értéke egyébként 0), bár az eloszlása más lesz, mint az előzőekben.

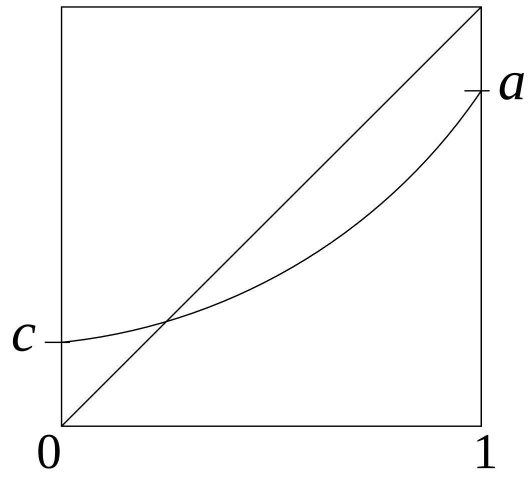
2.2.2. Paramétertartomány

$$\mathbb{P}(\rho_{k,j}^{(N)} = 1 \mid X_k^{(N)}) = a(X_k^{(N)})^2 + 2bX_k^{(N)}(1 - X_k^{(N)}) + c(1 - X_k^{(N)})^2 =$$
$$= (a - 2b + c)(X_k^{(N)})^2 + (2b - 2c)X_k^{(N)} + c,$$

ennek megfelelően vezessük be a $T : [0,1] \to [0,1]$ leképezést a következőképpen:

$$T(x) := (a - 2b + c)x^2 + (2b - 2c)x + c,$$

felrajzolva (0-ban c, 1-ben a):



A fixpont(ok) a $T(x) = x$ egyenlet megoldása(i). Fixpontok száma:

1. *Minden pont* pontosan akkor fix, ha $a = 1$, $b = 1/2$, $c = 0$, ekkor a görbe egybeesik az egyenessel, tehát egyszerűen azzal ekvivalens esetben vagyunk, amikor egyet húzunk, és minden pont fix, tehát ezt a 3. fejezetben tárgyaljuk.

2. *Két fixpont lehet*, ha legalább az egyik fixpont 0 vagy 1 (másképp nem lehet két fixpont, hiszen T másodfokú görbe, $T(0) = c$ és $T(1) = a$).

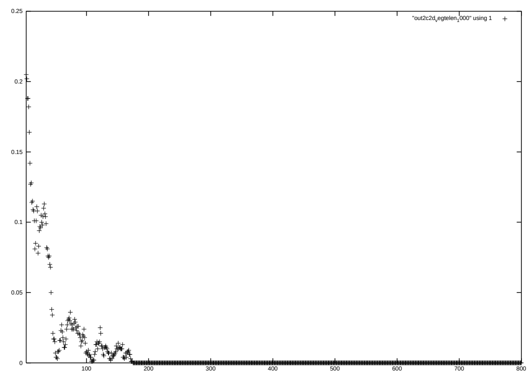
   (a) Ha 0 és 1 is fix (de nem az összes pont fix), akkor $a = 1$, $b \neq 1/2$, $c = 0$, ilyenkor $2b-1$ előjelétől függően az egyik stabil, a másik instabil fixpont.

   (b) Ha 0 és 1 közül csak az egyik fix, legyen ez például a 0 (a másik esetben ugyanez adódik), akkor $c = 0$, $a \neq 1$, és ekkor $T(x) = (a - 2b)x^2 + 2bx$, amiből a másik fixpontra kapjuk, hogy $x^* = (1 - 2b)/(a - 2b)$. A következő lehetőségek lépnek fel:

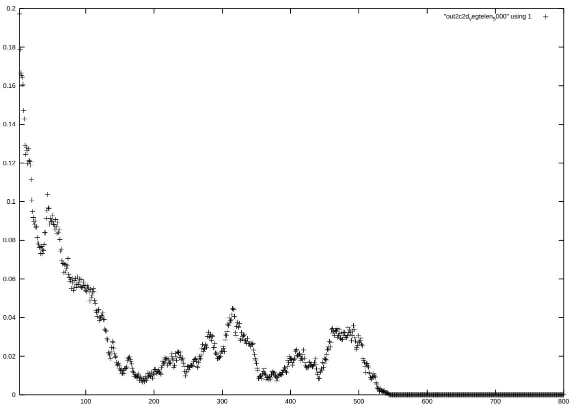
$a \neq 2b \neq 1$ esetén a fenti x^* létezik és $0 < x^* < 1$, ilyenkor $T'(x^*) = 2(1-b)$, míg 0-ban a derivált $2b$. Ez azt jelenti, hogy 0 és x^* közül az egyik stabil, a másik instabil. Ha a folyamat a 0-ba jut, akkor (lévén $c = 0$) odaragad, ezért az az eset az érdekes, amikor nem 0 a stabil, hanem a fenti x^*, ez a fejezet ilyen esetekről szól.

$a = 2b$ esetén egy egyenesről van szó, fixpontja csak a 0, és ott a derivált 1-nél kisebb, tehát stabil, exponenciálisan gyorsan odaér a folyamat, ez az eset nem érdekes.

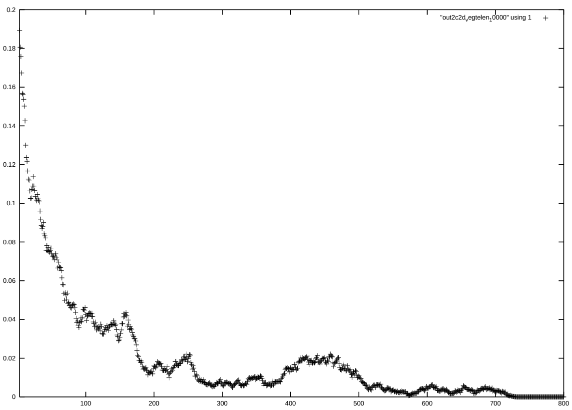
$b = 1/2$ esetén pedig 0 az egyetlen fixpont, és ott a derivált 1. Ekkor a folyamat 1 valószínűséggel beérkezik 0-ba, és akkor ott is marad, ugyanakkor a határfolyamat ($N \to \infty$) beérkezési idejének várható értéke végtelen. Ennek szemléltetését láthatjuk a 1, 2 és az 3. ábrákon, a szimulációt N különböző értékeire futtattuk, a többi paraméter értéke: $a = 0.8$, $b = 0.5$, $c = 0$. A rajzokon vízszintesen az időt, függőlegesen $X_k^{(N)}$ értékeit ábrázoltuk. Összehasonlításképp nézzük meg a 4 és a 5. ábrákat is, ahol a paramétereket csak annyira változtattuk meg, hogy a 0 stabil fixpont legyen ($a = 0.8$, $b = 0.5$, $c = 0$).



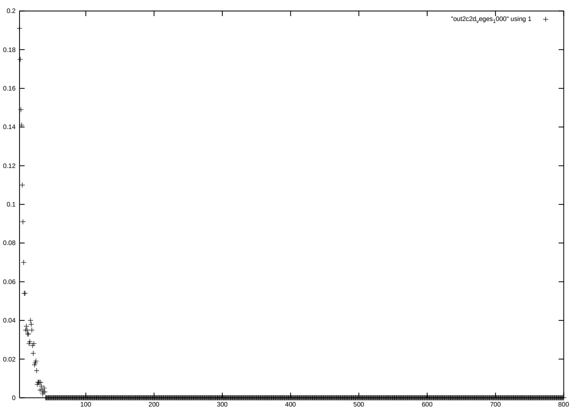
1. ábra. $N = 1000$, 0 az egyetlen fixpont, és ott a derivált 1



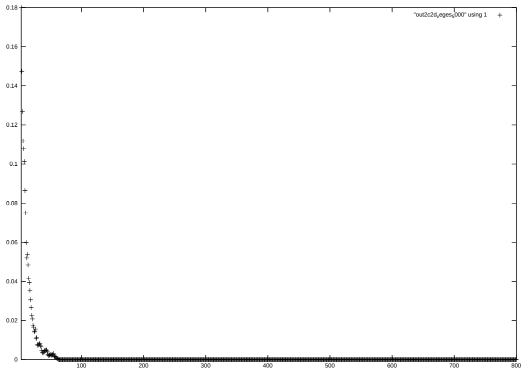
2. ábra. $N = 5000$ (0-ban a derivált 1)



3. ábra. $N = 10000$ (0-ban a derivált 1)



4. ábra. $N = 1000$, 0 az egyetlen fixpont, és ott a derivált 0.9



5. ábra. $N = 5000$ (0-ban a derivált 0.9)

3. *Egyetlen fixpont* akkor van, ha $a \neq 0$, $c \neq 0$, ekkor a fixpontban kiszámolva T deriváltját azt kapjuk, hogy az $T'(x^*) = 1 - \sqrt{(2b-1)^2 + 4c(1-a)}$, tehát a fixpont potosan akkor stabil, ha
$$(2b-1)^2 + 4c(1-a) < 4.$$
Megjegyzés: Azokban az esetekben, amikor a fixpont instabil, a $T(T(x))$ második iterált transzformáció deriváltját vizsgálva a T fixpontjától eltérő két fixpontban, kiderül, hogy ott az iterált transzformáció deriváltja abszolút értékben mindig kisebb, mint 1, ami azt jelenti, hogy a folyamat egy idő után felváltva lesz (lépésenként) hol az egyik, hol a másik fixpont közelében.

Összefoglalva: ebben a fejezetben azokat az esetet vizsgáljuk, amikor egyetlen stabil fixpont van, de az nem 0 és nem 1, tehát a paraméterekre az ($a \neq 0$, $b > 1/2$, $c = 0$, $a \neq 2b$), az ($a = 0$, $b < 1/2$, $c \neq 0, a \neq 2c$) illetve az ($a \neq 0$, $c \neq 0$, $(2b-1)^2 + 4c(1-a) < 4$) feltételek valamelyike teljesül.

2.2.3. A vizsgálat eredménye

A 2.1. fejezetben bevezetett jelölésekkel élve, a folyamatot x^*-tól legfeljebb $1/N$ távolságból indítva bebizonyosodik, hogy

2. Tétel. $\left(\xi_k^{(N)}\right) \Rightarrow \left(\xi_k\right)$, amint $N \to \infty$, ahol ξ_k a következő diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamat:
$$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_{k+1} = T'(x^*)\xi_k + \beta Y_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}),$$
itt $|T'(x^*)| < 1$ (ez épp a fixpont stabilitásával ekvivalens), $\beta = \sqrt{x^*(1-x^*)}$, Y_k-k pedig ugyanolyanok, mint az előbbi fejezetben leírtak.

Bizonyítás. A 2.1.3. fejezetben leírt eljárást követjük, a következő változtatásokkal:

A $\rho_{k,j}^{(N)}$ változók eloszlása most

$$\mathbb{P}(\rho_{k,j}^{(N)} = 1 \mid X_k^{(N)}) = T(X_k^{(N)}) = 1 - \mathbb{P}(\rho_{k,j}^{(N)} = 0 \mid X_k^{(N)}),$$

ezeket az ismét bevezetett $U_{k,j}$ független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók segítségével a $\rho_{k,j}^{(N)} := \mathbb{1}_{\{U_{k,j} < T(X_k^{(N)})\}}$ módon definiáljuk, valamint ismét használjuk a $\tilde{\rho}_{k,j} := \mathbb{1}_{\{U_{k,j} < x^*\}}$ változókat is.

Felhasználjuk még azt az észrevételt, hogy mivel T kvadratikus leképezés,

$$T(X_k^{(N)}) = T(x^* + \frac{1}{\sqrt{N}}\xi_k^{(N)}) = x^* + T'(x^*)\frac{1}{\sqrt{N}}\xi_k^{(N)} + \frac{1}{2}T''(x^*)\frac{1}{N}(\xi_k^{(N)})^2.$$

Most már írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\xi_{k+1}^{(N)} = \sqrt{N}(X_k^{(N)} - x^*) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - x^*) = \\
= T'(x^*)\xi_k^{(N)} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\tilde{\rho}_{k,j} - x^*) + \\
+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\left(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{\rho}_{k,j} - \frac{1}{\sqrt{N}}T'(x^*)\xi_k^{(N)} - \frac{1}{N}\frac{1}{2}T''(x^*)(\xi_k^{(N)})^2\right) + \\
+ \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{2}T''(x^*)(\xi_k^{(N)})^2.
\end{aligned}$$

Az összeg második tagja a 2.1.3. fejezetben leírttal teljesen megegyezik, tehát gyengén konvergál egy eddigiektől független standard normális eloszlású valószínűségi változó β-szorosához. A harmadik és negyedik tag valószínűségben tart 0-hoz, ezt hasonlóképp bizonyítjuk, mint az előző fejezetben:

Bevezetve ismét az $S_k^{(N)} := X_k^{(N)} - x^*$ valódi (nem normált) eltérést, és felhasználva, hogy

$$T(X_k^{(N)}) - x^* = T(x^* + S_k^{(N)}) - T(x^*) = T'(x^*)S_k^{(N)} + \frac{1}{2}T''(x^*)(S_k^{(N)})^2,$$

írhatjuk, hogy

$$\left|S_{k+1}^{(N)}\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - T(X_k^{(N)})) + T(X_k^{(N)}) - x^*\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\sqrt{N}}O(1)Q_{k+1}^{(N)} + T'(x^*)S_k^{(N)} + T''(x^*)(S_k^{(N)})^2\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{\sqrt{N}}O(1)Q_{k+1}^{(N)}\right| + \left|T'(x^*)S_k^{(N)}\right| + \left|T''(x^*)S_k^{(N)}\right|,$$

használva, hogy $|S_k^{(N)}| \leq 1$ miatt $|(S_k^{(N)})^2| \leq |S_k^{(N)}|$. Ebből pedig ismét $S_{k+1}^{(N)}$-gyel szorozva mindkét oldalt, és a Cauchy - Schwarz - Bunyakovszkij egyenlőtlenséget használva, majd egyszerűsítve kapjuk:

$$\sqrt{\mathbb{E}\left(S_{k+1}^{(N)}\right)} \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) + O(1)\sqrt{\mathbb{E}\left(S_k^{(N)}\right)} \leq \ldots \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

azaz

$$\mathbb{E}\left((S_{k+1}^{(N)})^2\right) = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

és a szórásnégyzet is ilyen:

$$\mathbb{D}^2\left(S_{k+1}^{(N)}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

a harmadik tagot tehát ugyanúgy becsüljük felül valószínűségben, mint az előző fejezetben. A negyedik tagra pedig, bármilyen rögzített $\varepsilon > 0$ számra

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}(\xi_k^{(N)})^2 \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left((S_k^{(N)})^2 \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}\right) = \mathbb{P}\left(\left|S_k^{(N)}\right| \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt[4]{N}}\right) \leq$$
$$\leq \mathbb{P}\left(\left|S_k^{(N)} - \mathbb{E}(S_k^{(N)})\right| \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt[4]{N}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) \leq \frac{\mathbb{D}^2(S_k^{(N)})}{O(\frac{1}{\sqrt{N}})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

■

2.3. 3 illetve d szín, 1-et húzunk

A 2.1. fejezetben leírt eredmény egy az egyben átvihető 3 illetve tetszőleges (véges) d szín esetére, a bizonyítás módja is ugyanaz. Továbbiakban csak a 3 szín esetet részletezzük, a jelölések felesleges bonyolódását elkerülendő.

A k-adik időpontbeli állapotot most az $\boldsymbol{X}_k^{(N)}$ kétdimenziós vektor írja le, melynek i-edik koordinátája az i-edik szín aránya, a színeket az x, y, z

betűkkel jelöljük. Az átmenetvalószínűségeket célszerű a P sztochasztikus mátrixba rendezni: v szín húzása esetén a w szín betevésének valószínűségét jelölje p_{vw}.

$$P = \left[\begin{array}{ccc} 1 - p_{xy} - p_{xz} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & 1 - p_{yx} - p_{yz} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & 1 - p_{zx} - p_{zy} \end{array} \right].$$

A j-ediknek betett golyó színének eloszlása felírásához és a továbbiakhoz is hasznos lesz a következő A mátrix és $\boldsymbol{\gamma}$ vektor definiálása:

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 - p_{xy} - p_{xz} - p_{zx} & p_{yx} - p_{zx} \\ p_{xy} - p_{zy} & 1 - p_{yx} - p_{yz} - p_{zy} \end{array} \right], \ \boldsymbol{\gamma} = \left[\begin{array}{c} p_{zx} \\ p_{zy} \end{array} \right].$$

Formálisan d szín esetén: jelölje E a $(d-1) \times (d-1)$-es egységmátrixot. E mellé jobbra írva egy $(d-1)$-dimenziós nullvektort kapjuk E_1-et, E alá írva egy $(d-1)$-dimenziós csupa (-1) vektort kapjuk E_2-t, $\boldsymbol{e}_{d-1}$-gyel jelöljük a $(d-1)$-edik egységvektort, ezekkel

$$A = E_1 P^T E_2, \ \boldsymbol{\gamma} = E_1 P^T \boldsymbol{e}_{d-1}.$$

Ezekkel a jelölésekkel annak valószínűsége, hogy a k-adik dobozból j-edszerre húzva a $(k+1)$-edik dobozba tett golyó m színű, $e_m^T(A\boldsymbol{X}_k^{(N)} + \boldsymbol{\gamma})$.

Bevezetünk $U_{k,j}$ független, $[0,1]$-en egyenletes eloszlású változókat, és ezek segítségével definiáljuk a k-adik dobozból j-edszerre való húzás alapján a $(k+1)$-edik dobozba tett golyó színét jelző $\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}$ változókat. Az általuk felvett lehetséges értékek

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a definíció pedig:

$$\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{ha } U_{k,j} < \boldsymbol{e}_1^T \cdot (A\boldsymbol{X}_k^{(N)} + \boldsymbol{\gamma}), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{ha } \boldsymbol{e}_1^T \cdot (A\boldsymbol{X}_k^{(N)} + \boldsymbol{\gamma}) < U_{k,j} < (\boldsymbol{e}_1^T + \boldsymbol{e}_2^T) \cdot (A\boldsymbol{X}_k^{(N)} + \boldsymbol{\gamma}), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{ha } (\boldsymbol{e}_1^T + \boldsymbol{e}_2^T) \cdot (A\boldsymbol{X}_k^{(N)} + \boldsymbol{\gamma}) < U_{k,j}. \end{cases}$$

A fixpont, $\boldsymbol{x}^*$, a P mátrix 1 sajátértékéhez tartozó baloldali sajátvektor (a sajátirányból az a vektor, melyben a koordináták összege 1), ez az $\boldsymbol{x}^* =$

$A\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\gamma}$ egyenlet megoldása. A továbbiakban a többi jelöléshez igazodva $\boldsymbol{x}^*$ a $(d-1)$-dimenziós vektor lesz (az utolsó koordinátát elhagyjuk, azt a többi meghatározza).

Megjegyzés: Ebben a fejezetben azt az esetet tárgyaljuk, amikor az 1 pontosan egyszeres sajátértéke P-nek. A többi eset a 3. illetve a 4. fejezetekben található.

Vezessük be a $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,j}$ valószínűségi változókat is, melyek értékkészlete ugyanaz, mint $\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}$-ké, definiáljuk őket a következőképpen:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,j} := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{ha } U_{k,j} < \boldsymbol{e}_1^T \cdot \boldsymbol{x}^*, \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{ha } \boldsymbol{e}_1^T \cdot \boldsymbol{x}^* < U_{k,j} < (\boldsymbol{e}_1^T + \boldsymbol{e}_2^T) \cdot \boldsymbol{x}^*, \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{ha } (\boldsymbol{e}_1^T + \boldsymbol{e}_2^T) \cdot \boldsymbol{x}^* < U_{k,j}. \end{cases}$$

Ezekkel ugyanazt írhatjuk fel, mint a 2.1.3. fejezetben:

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1}^{(N)} = A\boldsymbol{\xi}_k^{(N)} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (\tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,j} - \boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,j} - \frac{1}{\sqrt{N}} \alpha \boldsymbol{\xi}_k^{(N)}).$$

Az összeg második tagja a többdimenziós centrális határeloszlás tétel szerint gyengén konvergál $B\boldsymbol{Y}_{k+1}$-hez, ahol $\boldsymbol{Y}_{k+1}$ $(d-1)$-dimenziós, független komponensű standard normális változó, B pedig a kovarianciamátrix négyzetgyöke. B^2 a $d = 3$ esetben a következő (x_1^*-gal illetve x_2^*-gal jelölve $\boldsymbol{x}^*$ koordinátáit):

$$B^2 = \begin{bmatrix} x_1^*(1-x_1^*) & -x_1^* x_2^* \\ -x_1^* x_2^* & x_2^*(1-x_2^*) \end{bmatrix}.$$

Az összeg harmadik tagja valószínűségben tart 0-hoz, ennek bizonyítása a Csebisev-egyenlőtlenség általános alakjának használatával tehető meg. E szerint ugyanis bármely $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ pozitív, μ-mérhető függvényre, $D \subseteq \Omega$ mérhető halmazra és $c > 0$ konstansra

$$\mu\{x \in D : \Phi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_D \Phi(x) \mathrm{d}\mu.$$

Esetünkben bármely rögzített $\varepsilon > 0$ mellett

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,j}\right) - \sqrt{N}A\boldsymbol{\xi}_k^{(N)}\right| \geq \varepsilon\sqrt{N} \;\middle|\; \boldsymbol{X}_k^{(N)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2 N}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)} - \tilde{\boldsymbol{\rho}}_{k,j} - \frac{1}{\sqrt{N}}A\boldsymbol{\xi}_k^{(N)}\right|^2\right).$$

A számláló jól számolható módon egyenlő

$$\left(\sqrt{N}\sum_{m=1}^{d-1} c_m - \sum_{m=1}^{d-1} c_m^2\right)\text{-tel,}$$

ahol $c_m = \frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{e}_m^T A\boldsymbol{\xi}_k^{(N)}$, így, hasonló becsléssel élve $S_k^{(N)}$ szórásnégyzetére, mint az előző bizonyításokban, a fenti feltételes valószínűség várható értéke 0-hoz tart.

Ezzel bebizonyítottuk a 2.1. fejezetbeli állítás megfelelőjét:

3. Tétel. $\boldsymbol{\xi}_k^{(N)} \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_k$, amint $N \to \infty$, ahol

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\xi}_{k+1} = A\boldsymbol{\xi}_k + B\boldsymbol{Y}_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

A és B a feljebb definiált mátrixok (A kontrakció), $\boldsymbol{Y}_k$-k pedig független komponensű $(d-1)$-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változók, egymástól és minden $\boldsymbol{\xi}_k$-tól is függetlenek.

■

3. Wright - Fisher egyenlet és arra vezető esetek

3.1. Wright - Fisher egyenlet

Az 1-dimenziós Wright - Fisher egyenlet a következő sztochasztikus differenciálegyenlet:

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t(1 - X_t)}\mathrm{d}B_t.$$

Az ezt kielégítő X_t diffúzióra tehát

$$\mathbb{E}(X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{F}_t) = o(h),$$

$$\mathbb{E}\left((X_{t+h} - X_t)^2 \mid \mathcal{F}_t\right) = hX_t(1 - X_t) + o(h).$$

A következőkben megmutatjuk, hogy a Bevezetésben szereplő alapmodell erre a folyamatra vezet ($N \to \infty$), valamint megtaláljuk a megfelelő 2-dimenziós egyenletet is.

3.2. 2 szín (1-et vagy 2-t húzunk)

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor 2 szín van, 1-et húzunk, és minden pont fix (piros húzása esetén biztosan pirosat, kék húzása esetén biztosan kéket teszünk be), illetve ezzel ekvivalens a „2 szín, 2-t húzunk" azon esete, amikor $p_{xx|x} = 1$, $p_{xy|x} = 1/2$, $p_{yy|x} = 0$. Legyen $\tilde{X}_k^{(N)} \colon \Omega \times \mathbb{N} \to \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$ a k-adik időpontban a dobozban lévő piros golyók aránya, a folyamat természetes filtrációját jelölje $\mathcal{G}_k^{(N)}$. Legyen az $X_t^{(N)} \colon \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1\}$ folyamat $\tilde{X}^{(N)}$ értékei által definiálva:

$$X_t^{(N)} := \tilde{X}_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)},$$

ennek természetes filtrációja $\mathcal{F}_t^{(N)} = \mathcal{G}_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)}$.

Az 1.2.2. fejezetben leírtak szerint $X_t^{(N)}$ feszességét feltételezve ha belátjuk, hogy fix N-re és minden $f \in \mathrm{C}^4([0,1])$ függvényre

$$f(X_t^{(N)}) - f(X_0^{(N)}) - \int_0^t X_u^{(N)}(1 - X_u^{(N)})\frac{1}{2}f''(X_u^{(N)})\mathrm{d}u$$

egy N növekedésével valószínűségben eltűnő tagtól eltekintve martingál $\mathcal{F}_t^{(N)}$-re nézve, akkor igaz, hogy:

4. Tétel. A fent definiált $X_t^{(N)}$ folyamatra $X_t^{(N)} \Rightarrow X_t$, ahol X_t a

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t(1-X_t)}\mathrm{dB}_t$$

Wright - Fisher egyenlet megoldása, itt B_t egydimenziós Brown-mozgás. Az X_t folyamat a kezdeti eloszlástól eltekintve egyértelmű.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy bármilyen $t, s > 0$ számra

$$\mathbb{E}\left(f(X_{t+s}^{(N)}) - f(X_0^{(N)}) - \int_0^{t+s} X_u^{(N)}(1-X_u^{(N)})\frac{1}{2}f''(X_u^{(N)})\mathrm{d}u \;\middle|\; \mathcal{F}_t^{(N)} \right) =$$

$$= f(X_t^{(N)}) - f(X_0^{(N)}) - \int_0^{t} X_u^{(N)}(1-X_u^{(N)})\frac{1}{2}f''(X_u^{(N)})\mathrm{d}u + \mathrm{O}(N^{-1/2}),$$

azaz a hiba s-ben egyenletesen $\mathrm{O}(N^{-1/2})$. Ezt a következőképpen tesszük:

Megmutatjuk, hogy bármilyen $k \in \mathbb{N}^+$-ra

$$\mathbb{E}\left(f(\tilde{X}_{k+1}^{(N)}) - f(\tilde{X}_0^{(N)}) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{N}\tilde{X}_j^{(N)}(1-\tilde{X}_j^{(N)})\frac{1}{2}f''(\tilde{X}_j^{(N)}) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)} \right) =$$

$$= f(\tilde{X}_k^{(N)}) - f(\tilde{X}_0^{(N)}) - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N}\tilde{X}_j^{(N)}(1-\tilde{X}_j^{(N)})\frac{1}{2}f''(\tilde{X}_j^{(N)}) + \mathrm{O}(N^{-3/2}), \quad (9)$$

ebből már világos lesz, hogy bármilyen rögzített $t, s > 0$ számokra, bevezetve a $k := \lfloor Nt \rfloor$ és $m := \lfloor Ns \rfloor$ jelöléseket, valamint a

$$\psi_f\big((\tilde{X}^{(N)})_0^{k+m}\big) := f(\tilde{X}_{k+m}^{(N)}) - f(\tilde{X}_0^{(N)}) - \sum_0^{k+m} \frac{1}{2}\tilde{X}_u^{(N)}(1-\tilde{X}_u^{(N)})f''(\tilde{X}_u^{(N)})\mathrm{d}u$$

rövidítést, a „toronyszabály” alkalmazásával:

$$\mathbb{E}\left(f(X_{t+s}^{(N)}) - f(X_0^{(N)}) - \int_0^{t+s} X_u^{(N)}(1-X_u^{(N)})\frac{1}{2}f''(X_u^{(N)})\mathrm{d}u \;\middle|\; \mathcal{F}_t^{(N)} \right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\psi_f\big((\tilde{X}^{(N)})_0^{k+m}\big) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)} \right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\ldots \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\Big(\psi_f\big((\tilde{X}^{(N)})_0^{k+m}\big) \;\Big|\; \mathcal{G}_{k+m-1}^{(N)} \Big) \;\middle|\; \mathcal{G}_{k+m-2}^{(N)} \right) \ldots \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)} \right) =$$

$$= f(\tilde{X}_k^{(N)}) - f(\tilde{X}_0^{(N)}) - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N}\tilde{X}_j^{(N)}(1-\tilde{X}_j^{(N)})\frac{1}{2}f''(\tilde{X}_j^{(N)}) + m\mathrm{O}(N^{-3/2}),$$

azaz a hibatag $m\mathrm{O}(N^{-3/2}) = \lfloor Ns \rfloor \mathrm{O}(N^{-3/2}) = \mathrm{O}(N^{-1/2})$.

Az $X_t^{(N)}$ értékek helyére az $\tilde{X}_k^{(N)}$-t használó definíciókat írva ($\lfloor Nt \rfloor =: k$) a továbbiakban tehát igazoljuk (9)-et. Benne az első tag (Taylor-sorfejtést használva):

$$\mathbb{E}\left(f(\tilde{X}_{k+1}^{(N)}) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) = \mathbb{E}\left(f(\tilde{X}_k^{(N)} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{X}_k^{(N)})) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) =$$

$$= f(\tilde{X}_k^{(N)}) + \frac{1}{N} f'(\tilde{X}_k^{(N)}) \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{X}_k^{(N)}) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{N^2}\frac{1}{2} f''(\tilde{X}_k^{(N)}) \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{X}_k^{(N)})\right)^2 \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) + \mathbb{E}\left(h \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right). \quad (10)$$

A (10) egyenlet jobboldalán szerplő második tag 0, hiszen $\rho_{k,j}^{(N)}$ feltételes várható értéke $\mathcal{G}_k^{(N)}$-ra nézve $\tilde{X}_k^{(N)}$. A harmadik tagban

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{X}_k^{(N)})\right)^2 \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) = \sum_{i \neq j} 0 + \sum_{j=1}^{N} \mathbb{D}^2(\rho_{k,j}^{(N)} | \mathcal{G}_k^{(N)}) = N\tilde{X}_k^{(N)}(1 - \tilde{X}_k^{(N)}).$$

A $\mathbb{E}\left(h \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right)$ hibatag abszolútértékét pedig a következőképp becsüljük felülről a Hölder-egyenlőtlenség használatával (rövidítésül vezessük be az $\varepsilon := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(\rho_{k,j}^{(N)} - \tilde{X}_k^{(N)})$ jelölést):

$$\left|\mathbb{E}(h \mid \mathcal{G}_k^{(N)})\right| \leq \mathbb{E}\left(|h| \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) \leq \mathbb{E}(c|\varepsilon|^3 \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}) \leq c\left[\mathbb{E}((\varepsilon)^4 \mid \mathcal{G}_k^{(N)})\right]^{3/4}.$$

A $\mathbb{E}((\varepsilon)^4 \mid \mathcal{G}_k^{(N)})$ tag pedig könnyen számolható módon $\mathrm{O}(N^{-2})$, a hibatag tehát $\mathrm{O}(N^{-3/2})$. Összefoglalva (10)-re a következőt kaptuk:

$$\mathbb{E}\left(f(\tilde{X}_{k+1}^{(N)}) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) = f(\tilde{X}_k^{(N)}) + \frac{1}{N}\frac{1}{2} f''(\tilde{X}_k^{(N)})\tilde{X}_k^{(N)}(1 - \tilde{X}_k^{(N)}) + \mathrm{O}(N^{-3/2}).$$

(9)-ben a második tag $f(\tilde{X}_0^{(N)})$, a harmadik pedig (ugyanolyan módszerrel, mint az előbb):

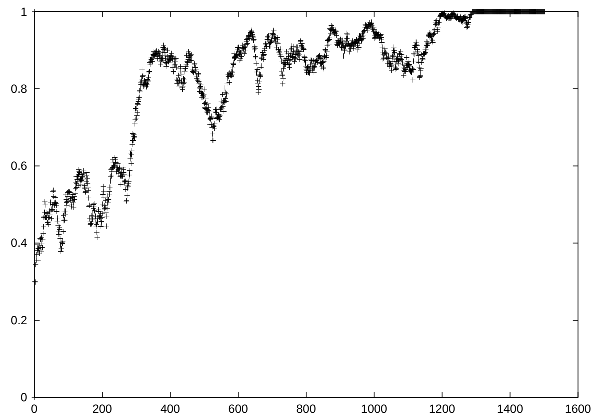
$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{N}\tilde{X}_j^{(N)}(1 - \tilde{X}_j^{(N)})\frac{1}{2} f''(\tilde{X}_j^{(N)}) \;\middle|\; \mathcal{G}_k^{(N)}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{N}\tilde{X}_j^{(N)}(1 - \tilde{X}_j^{(N)})\frac{1}{2} f''(\tilde{X}_j^{(N)}) + \frac{1}{N}\frac{1}{2}\tilde{X}_k^{(N)}(1 - \tilde{X}_k^{(N)}) f''(\tilde{X}_k^{(N)}) + \mathrm{O}(N^{-2}).$$

Összességében tehát a hiba $\mathrm{O}(N^{-2})+\mathrm{O}(N^{-3/2}) = \mathrm{O}(N^{-3/2})$, ezzel (9) és vele a tétel bizonyítást nyert.

$\blacksquare$

Az alábbi ábrán egy tipikus lefutást láthatunk a tételben szereplő folyamatra (vízszintesen az időt, függőlegesen az $X_k^{(N)}$ értékeket tüntettük fel).



6. ábra. Az egydimenziós Wright - Fisher egyenlet szerinti mozgás

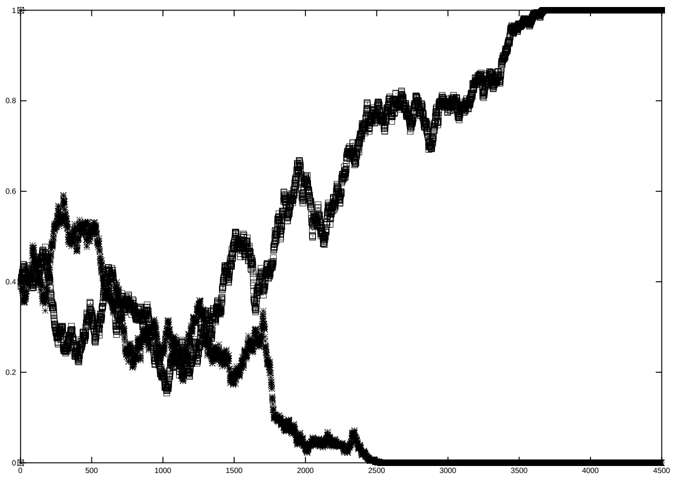
3.3. 3 szín (1-et vagy 2-t húzunk)

Azt az esetet nézzük, amikor 3 szín van, 1-et húzunk, és minden pont fix. Ez akkor lép fel, ha mindig olyan színű golyót teszünk be, mint amilyet húztunk. Ugyanide vezet az is, amikor 3 szín van, 2-t húzunk, és a paraméterek a 4.3. fejezetben található táblázatba foglalva a következők:

$p_{xx,x}$	$p_{xx,y}$	$p_{yy,x}$	$p_{yy,y}$	$p_{zz,x}$	$p_{zz,y}$	$p_{xy,x}$	$p_{xy,y}$	$p_{xz,x}$	$p_{xz,y}$	$p_{yz,x}$	$p_{yz,y}$
1	0	0	1	0	0	1/2	1/2	1/2	0	0	1/2

A folyamatot a k időpontban az $\tilde{\boldsymbol{X}}_k^{(N)}$ kétdimenziós vektorváltozó írja le, koordinátái a megfelelő színek arányát jelentik (a harmadik szín arányát az első kettőé meghatározza).

Az alábbi ábrán a két koordináta mozgását figyelhetjük meg (vízszintesen az időt, függőlegesen a két koordinátát látjuk).



7. ábra. A kétdimenziós Wright - Fisher egyenlet szerinti mozgás

A folytonos idejű $\boldsymbol{X}_t^{(N)}$ folyamatot $\tilde{\boldsymbol{X}}_k^{(N)}$-ből az előző fejezetben leírttal megegyező módon definiáljuk:

$$\boldsymbol{X}_t^{(N)} := \tilde{\boldsymbol{X}}_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)}.$$

A továbbiakban $\begin{pmatrix} X_t^{(N)} \\ Y_t^{(N)} \end{pmatrix}$-vel jelöljük $\boldsymbol{X}_t^{(N)}$ koordinátáit.

A 3.3. fejezetben megfogalmazott tétel megfelelőjét mondhatjuk ki ebben az esetben:

5. Tétel. Az $\boldsymbol{X}_t^{(N)}$ folyamatra $\boldsymbol{X}_t^{(N)} \Rightarrow \boldsymbol{X}_t$, ahol a határfolyamatot a következő sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = \sigma(\boldsymbol{X}_t)\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t,$$

itt $\boldsymbol{B}_t$ kétdimenziós standard Brown-mozgás, $\sigma(\boldsymbol{X}_t)$ pedig az a (2×2)-es szimmetrikus mátrix, melynek négyzete (a határfolyamat koordinátáit $\begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$-vel jelölve)

$$A = (\sigma(\boldsymbol{X}_t))^2 = \begin{bmatrix} X_t(1-X_t) & -X_tY_t \\ -X_tY_t & Y_t(1-Y_t) \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. A martingálprobléma értelmében azt kell ehhez belátnunk (a feszességet ismét feltételezve), hogy minden $f \in C^4([0,1]^2)$ függvényre

$$f(\boldsymbol{X}_t^{(N)}) - f(\boldsymbol{X}_0^{(N)}) - \int_0^t Lf(\boldsymbol{X}_u^{(N)})\mathrm{d}u$$

egy N növekedésével valószínűségben eltűnő tagtól eltekintve martingál a természetes filtrációra nézve, itt L az A mátrix által a következőképp definiált differenciáloperátor:

$$L = \frac{1}{2}\left(A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{12}\frac{\partial^2}{\partial xy} + A_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Ennek bizonyítása a 3.2. fejezetben leírtakhoz teljesen hasonló módon történik, a hibatag itt is s-ben egyenletesen $\mathrm{O}(N^{-1/2})$-nek adódik.

■

4. A két viselkedés együttes fellépése

4.1. Jelölések, a vizsgálat tárgya

Azokat az eseteket vizsgáljuk ebben a fejezetben, amikor a fixpontok halmaza nem tartalmazza az összes pontot, de nem is egyetlen pontból áll, hanem (1 húzás esetén) egy egyenes, illetve (2 húzás esetén) egy másodfokú görbe. A következő jelölésekkel élünk:

Célszerű ismét 3 helyett 2 dimenzióban dolgozni, azaz csak a piros golyók arányát (a k időpontban N golyó esetén ez $X_k^{(N)}$) és a kék golyók arányát ($Y_k^{(N)}$) számon tartani (a harmadik koordinátát ez a kettő egyértelműen meghatározza). A két alfejezetben különböző módon jelöljük az átmenet-valószínűségeket, de közösen használjuk a $\mathrm{T}(x, y)$ leképezést (az egyes fejezetekben a paraméterektől függően ez más és más lesz), amely a következőt adja meg: feltéve, hogy a dobozban lévő golyókat az (x, y) vektor írja le, mi a valószínűsége egy piros golyó betételének a következő dobozba. A k-adik dobozból j-edszerre való húzás alapján a $(k + 1)$-edik dobozba tett golyó színét a $\boldsymbol{\rho^{(N)}}_{k,j}$ vektorváltozó írja le, értéke

$$\boldsymbol{\rho^{(N)}}_{k,j} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{ha a } k\text{-adik dobozból } j\text{-edszerre húzva pirosat rakunk be,} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \text{ha kéket rakunk be,} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A $\boldsymbol{\rho^{(N)}}_{k,j}$ i-edik koordinátáját $\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[i]$-vel jelöljük. $\mathrm{T}(x, y)$ jelentése tehát:

$$\mathrm{T}(x, y) = \mathbb{P}(\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1] = 1 \mid X_k^{(N)} = x,\, Y_k^{(N)} = y) = \mathbb{E}(X_{k+1}^{(N)} \mid X_k^{(N)} = x,\, Y_k^{(N)} = y).$$

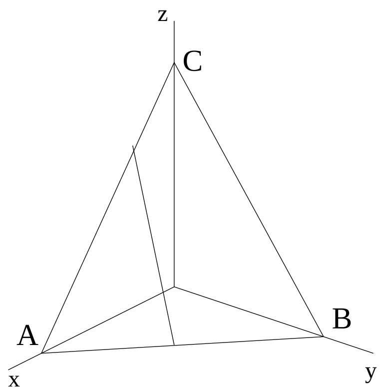
Ugyanígy definiáljuk az $\mathrm{U}(x, y)$ leképezést a második koordinátára. A fixpontegyenletrendszer az $x = \mathrm{T}(x, y)$ és az $y = \mathrm{U}(x, y)$ egyenletekből áll.

4.2. 3 szín, 1-et húzunk

A 2.3. fejezetben leírt módon a fixpontok halmaza d szín esetén a P mátrix 1-hez tartozó sajátvektorai által kifeszített halmaznak az a része, amelyikbe tartozó $\boldsymbol{x}$ vektorokra $\sum_{j=1}^{d} x_j = 1$. Ha az 1 sajátérték multiplicitása 1, akkor a 2., ha pedig d, akkor a 3. fejezetben tárgyalt esetben vagyunk. Ha azonban az 1 sajátérték multiplicitása $2 \leq p \leq d - 1$, akkor a fixpontok halmaza a $\{\boldsymbol{v}_i : i = 1..p\}$ sajátvektorok által kifeszített p-dimenziós altér és a $\sum_{j=1}^{d} x_j = 1$ hipersík metszete, azaz egy $p-1$ dimenziós sokaság.

A $d = 3$ esetet követjük végig, az állapottér, egy pillanatra mégis 3 dimenzióban elképzelve, az alábbi ábrán feltüntetett háromszöglap (a színeket az x, y, z betűkkel jelöljük). Ha a fixpontok halmaza nem triviális, akkor egy egyenes ($p = 2$).

A következő gondolatmenet mutatja, hogy a fixpontok egyenese biztosan átmegy legalább egy csúcson, ahol A-val jelöljük a „csupa x színű golyó" állapotot reprezentáló csúcsot, és megfelelően B-vel illetve C-vel a másik két csúcsot:



Tegyük fel, hogy a fixpontok halmaza egy olyan egyenes, amely nem megy át egyetlen csúcson sem, hanem metszi például az AB és az AC oldalakat. Ez azt jelenti, hogy van olyan fix állapot (az AB oldalon lévő fixpont), amely nem tartalmaz z színű golyót, viszont tartalmaz x és y színűt is. Gondolatban ebből a pontból indítva a folyamatot látjuk, hogy ha $p_{x,z}$ pozitív lenne, akkor ellentmondásra jutnánk, hiszen várhatóan megjelenne z színű golyó, pedig egy z-t nem tartalmazó fix állapotból indultunk. Ugyanezzel az okoskodással: van y színt nem tartalmazó fixpont is, emiatt $p_{x,y} = 0$ adódik. Vagyis kaptuk, hogy $p_{x,z} = 0 = p_{x,y}$, így $p_{x,x} = 1$, ami viszont azt jelenti, hogy a csupa x színű golyót tartalmazó állapotot jelentő A csúcs mégis fix.

Kaptuk tehát, hogy legalább egy csúcs fix, ez a P átmenetvalószínűségi mátrixra a következőket jelenti:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & b & 1-b \end{bmatrix}$$

(illetve ennek megfelelő változatai, annak megfelelően, hogy melyik csúcson megy át az egyenes). Itt a másik két 0 pontosan ugyanolyan megfontolásokból adódik, mint a fenti.

Ha egy másik csúcs is fixpont, például B (de C nem), akkor az AB oldal a fixpontok egyenese, és amint a folyamat megérkezik erre az egyenesre, ottragad (hiszen ilyenkor $p_{\mathrm{x,z}} = p_{\mathrm{y,z}} = 0$), és ott a 3.2. fejezetben leírt Wright-Fisher egyenlet szerint mozog. Ez az $a = 0$ (illetve megfelelő változatok) esetben lép fel.

Ha csak egyetlen csúcs fix, akkor két szemlélet szerint nézzük a mozgást: egyrészt a fix egyenes mentén, másrészt a fix egyenestől való oldalirányú eltérést tekintve. Ezt a két kérdést vizsgáljuk a következő két alfejezetben.

4.2.1. Az egyenes mentén való mozgás vizsgálata

Módszerünk az, hogy az aktuális $(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)})$ pont helyett a fix egyenes azon pontjának mozgását vizsgáljuk, ahová előbb-utóbb beérkezne a folyamat, ha a várható érték szerint mozogna. Bár az nem igaz, hogy bármely (x, y) pontból indulva a várható érték egyből ráesne az egyenesre, vegyük észre, hogy (a mátrix első oszlopának specialitása miatt) $\mathrm{T}(x, y) = x$ $(\forall x)$, azaz ha a folyamat a várható érték szerint mozog, akkor az egyenes felé az x tengelyre merőleges irányban lépked, ami azt jelenti, hogy azonos x koordinátájú pontok képe azonos az egyenesen. Tehát az egyenes mentén való mozgás vizsgálata egyenértékű az x koordináta mozgásának vizsgálatával. A

$$\mathrm{T}(x, y) = x$$

és

$$\mathrm{U}(x, y) = (1-a)y + b(1-x-y) = (1-a-b)y - bx + b$$

észrevételekből adódóan a fix egyenes egyenlete

$$y = -\frac{b}{a+b}x + \frac{b}{a+b}.$$

Mindezek után $X_k^{(N)}$ mozgásának vizsgálata:

$$X_{k+1}^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1] - X_k^{(N)}\right) + X_k^{(N)}, \tag{11}$$

tehát

$$X_{k+1}^{(N)} - X_k^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{X_k^{(N)}(1-X_k^{(N)})}\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1] - X_k^{(N)}\right)}{\sqrt{N}\sqrt{X_k^{(N)}(1-X_k^{(N)})}}.$$

Itt a $\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1]$ változó feltételes várható értéke $X_k^{(N)}$, szórása $\sqrt{X_k^{(N)}(1-X_k^{(N)})}$, azaz a határfolyamatra igaz lesz a

$$\mathrm{d}X_t = \sqrt{X_t(1-X_t)}\mathrm{d}B_t$$

összefüggés: a határfolyamatot a Wright - Fisher egyenlet írja le. A bizonyítás hasonlóképp történik, mint ahogy azt a 3.2. fejezetben leírtuk.

Szemléletesen ezt az eredményt megsejthetjük előre is, hiszen ha (mindhárom színt észben tartva) az aktuális állapotot rávetítjük az y-z síkkal párhuzamosan a fix egyenesre, és ennek a vetületpontnak a mozgását vizsgáljuk, akkor tulajdonképpen azt tesszük, hogy a y és z színeket összevonjuk egy $''yz''$ színné, és csak az $''yz''/x$ arányt vizsgáljuk. Mivel azonban $p_{\mathrm{yx}} = p_{\mathrm{zx}} = p_{\mathrm{xy}} = p_{\mathrm{xz}} = 0$, ez a mozgás ekvivalens az 1 dimenziós Wright - Fisher egyenlet által megadott mozgással.

4.2.2. Az egyenestől való eltérés vizsgálata

A fix egyenestől való y irányú eltérést jelöljük a k időpontban $S_k^{(N)}$-val,

$$S_k^{(N)} := Y_k^{(N)} - \left(-\frac{b}{a+b}X_k^{(N)} + \frac{b}{a+b}\right),$$

be fogjuk látni, hogy ennek várható nagyságrendje $1/\sqrt{N}$. Vezessük be tehát változónak ennek $\sqrt{N}$-szeresét is:

$$\xi_k^{(N)} := \sqrt{N}S_k^{(N)}.$$

A folyamatot indítsuk legfeljebb $1/\sqrt{N}$ távolságból a görbétől (hasonlóképpen, mint azt a 2.1. fejezetben is tettük), azaz legyen $X_0^{(N)}$ valamilyen tetszőleges, előre rögzített $x_0 \in [0,1]$ számhoz legközelebb lévő pontja az értékkészletnek (ekkor $|X_0^{(N)} - x_0| \leq 1/N$), és $Y_0^{(N)}$ legyen a görbe $X_0^{(N)}$-hoz tartozó pontjától legfeljebb $1/\sqrt{N}$ távolságra ($|S_k^{(N)}| \leq 1/\sqrt{N}$).

Bebizonyosodik a következő tétel:

6. Tétel. A fenti indítási feltételek mellett $\xi_k^{(N)} \Rightarrow \xi_k$, $N \to \infty$, ahol ξ_k a következő képlettel definiált diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamat:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_{k+1} = (1-a-b)\xi_k + \sqrt{c(1-c)(1-x_0)}Q_{k+1}.$$

Itt $|1-a-b| < 1$, $c = \frac{b}{a+b}$, x_0 az az előre rögzített szám, melytől legfeljebb $1/N$ távolságból indul $X_0^{(N)}$, Q_{k+1} pedig minden eddigitől független standard normális eloszlású valószínűségi változó.

Megjegyzés: Ha speciálisan $a+b=1$, akkor azt kapjuk, hogy a görbétől való eltérések egymástól független, azonos normális eloszlású valószínűségi változók. Erre a megjegyzésre a 4.3.2. fejezet kapcsán utalunk majd vissza.

Bizonyítás. Legyenek a paraméterek $a, b \in [0,1]$, nem mindkettő 0 (azt az esetet már a 3.3. fejezetben tárgyaltuk). Ekkor figyelembe véve $\mathrm{T}(x,y)$, $\mathrm{U}(x,y)$ aktuális jelentését, illetve a fixpontok egyenesének egyenletét (ld. az előző alfejezetben), azt írhatjuk, hogy

$$S_{k+1}^{(N)} = Y_{k+1}^{(N)} + \frac{b}{a+b} X_{k+1}^{(N)} - \frac{b}{a+b} =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[2] + \frac{b}{a+b} \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1] - (1-a-b) S_k^{(N)} - \frac{b}{a+b} \right) + (1-a-b) S_k^{(N)}.$$

Bevezetve a $Z_{k,j}^{(N)} := \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[2] + \frac{b}{a+b} \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1]$ változókat, melyek feltételes várható értéke

$$\mathbb{E}\left(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)} \right) = \mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) + \frac{b}{a+b} X_k^{(N)} = (1-a-b) S_k^{(N)} + \frac{b}{a+b},$$

feltételes szórásnégyzete

$$\mathbb{D}^2 \left(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)} \right) = F(X_k^{(N)}, S_k^{(N)}),$$

ahol $F(x,s)$ másodfokú, kétváltozós polinom[3], látjuk, hogy

$$S_{k+1}^{(N)} = (1-a-b) S_k^{(N)} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{F(X_k^{(N)}, S_k^{(N)})} \frac{\sum_{j=1}^{N} (Z_{k,j}^{(N)} - \mathbb{E}(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}))}{\sqrt{N} \mathbb{D}(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)})}. \tag{12}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\sqrt{N}$-nel, így $\xi_{k+1}^{(N)}$-re kapunk összefüggést:

$$\xi_{k+1}^{(N)} = (1-a-b) \xi_k^{(N)} + \sqrt{F(X_k^{(N)}, S_k^{(N)})} Q_{k+1}^{(N)} =$$
$$= (1-a-b) \xi_k^{(N)} + \sqrt{F(x_0, 0)} Q_{k+1}^{(N)} + H_{X_k^{(N)}, S_k^{(N)}} Q_{k+1}^{(N)}, \tag{13}$$

ahol a standard normálishoz gyengén konvergáló tagot $Q_{k+1}^{(N)}$-gyel jelöltük. A levezetés további része azt célozza, hogy megmutassuk, $H_{X_k^{(N)}, S_k^{(N)}}$ valószínűségben tart 0-hoz. Ehhez szükségünk lesz a következőkre:

(12) alapján becsüljük $S_k^{(N)}$ szórásnégyzetét a következőképpen:
Szorozzuk be mindkét oldalt $S_{k+1}^{(N)}$-gyel, és vegyük a várható értéket, ki-

[3]Konkrétan $F(x,s) = -(1-a-b)^2 s^2 + (1-a-b)(1 - \frac{2b}{a+b}) s + \frac{b}{a+b}(1 - \frac{b}{a+b})(1-x)$, így $F(x_0, 0) = \frac{b}{a+b}(1 - \frac{b}{a+b})(1 - x_0)$.

használva, hogy $X_k^{(N)}$ és $S_k^{(N)}$ korlátossága alapján $\sqrt{F(X_k^{(N)}, S_k^{(N)})}$ konstanssal becsülhető felülről:

$$\mathbb{E}\left((S_{k+1}^{(N)})^2\right) = (1-a-b)\mathbb{E}(S_k^{(N)} S_{k+1}^{(N)}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\mathbb{E}\left(Q_{k+1}^{(N)} S_{k+1}^{(N)}\right) \leq$$

$$\leq (1-a-b)\sqrt{\mathbb{E}\left((S_k^{(N)})^2\right)\mathbb{E}\left((S_{k+1}^{(N)})^2\right)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\sqrt{\mathbb{E}\left((S_{k+1}^{(N)})^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\mathbb{E}\left((S_{k+1}^{(N)})^2\right)}\left((1-a-b)\sqrt{\mathbb{E}\left((S_k^{(N)})^2\right)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad (14)$$

a Cauchy - Schwarz - Bunyakovszkij-egyenlőtlenség segítségével. Így

$$\sqrt{\mathbb{E}\left((S_{k+1}^{(N)})^2\right)} \leq (1-a-b)\sqrt{\mathbb{E}\left((S_k^{(N)})^2\right)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leq \ldots \leq$$

$$\leq (1-a-b)^{k+1}\sqrt{\mathbb{E}\left((S_0^{(N)})^2\right)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \quad (15)$$

ezzel kaptuk, hogy

$$\mathbb{D}^2(S_{k+1}^{(N)}) = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Szükségünk lesz még $X_k^{(N)} - x_0$ várható értékére és szórásnégyzetére is:

$$\mathbb{E}(X_{k+1}^{(N)} - x_0) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}(X_{j+1}^{(N)} - X_j^{(N)}) + \mathbb{E}(X_0^{(N)} - x_0) = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (16)$$

valamint a szórásnégyzethez szorozzuk meg (11) mindkét oldalát $X_{k+1}^{(N)}$-gyel, majd alkalmazzuk a (14)-ben látott becslés megfelelőjét:

$$\sqrt{\mathbb{E}\left((X_{k+1}^{(N)})^2\right)} \leq \sqrt{\mathbb{E}\left((X_k^{(N)})^2\right)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leq \ldots \leq$$

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}\left((X_0^{(N)})^2\right)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = x_0 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

használva az indítási feltételt ($X_0^{(N)} = x_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)$). Ebből

$$\mathbb{E}\left((X_{k+1}^{(N)})^2\right) = x_0^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

és így

$$\mathbb{E}\left((X_{k+1}^{(N)}-x_0)^2\right)=\mathbb{E}\left((X_{k+1}^{(N)})^2\right)-2x_0\mathbb{E}(X_{k+1}^{(N)})+x_0^2=$$
$$=x_0^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)-2x_0\left(x_0+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)+x_0^2=O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Ez és (16) alapján tehát

$$\mathbb{D}^2(X_k^{(N)}-x_0)=O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{17}$$

Visszatérve (13)-ra, $\sqrt{F(x,s)}$-nek $(x,0)$ körüli Taylor-sorfejtéséből

$$|H_{X_k^{(N)},S_k^{(N)}}|\le c_1|X_k^{(N)}-x|+c_2|S_k^{(N)}|,$$

vagyis a hiba valószínűségben konvergál 0-hoz (ennek belátásához kellenek a fent számolt $\mathbb{D}^2(S_k^{(N)})=O(1/N)$ és $\mathbb{D}^2(X_k^{(N)}-x_0)=O(1/\sqrt{N})$ nagyságrendek).

■

4.3. 3 szín, 2-t húzunk

Jelölésrendszer. Ha három szín van, és kettőt húzunk, akkor 12 paraméter van, ezeket a következő táblázatba foglaljuk, és az itt bevezetett betűkkel hivatkozunk rájuk:

$p_{xx,x}$	$p_{xx,y}$	$p_{yy,x}$	$p_{yy,y}$	$p_{zz,x}$	$p_{zz,y}$	$p_{xy,x}$	$p_{xy,y}$	$p_{xz,x}$	$p_{xz,y}$	$p_{yz,x}$	$p_{yz,y}$
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

A hiányzó valószínűségek egyértelműen meghatározottak a többi által.

A 4.3. fejezetben bevezetett betűket használva a megfelelő átmenetvalószínűségekre, a T és U leképezések(ld. 4.1. fejezet) jelen esetben a következőek:

$$\mathrm{T}(x,y)=(a+e-2i)x^2+(c+e-2k)y^2+2(e+g-i-k)xy+2(i-e)x+2(k-e)y+e,$$

illetve

$$\mathrm{U}(x,y)=(b+f-2j)x^2+(d+f-2l)y^2+2(f+h-j-l)xy+2(j-f)x+2(l-f)y+f.$$

Ahhoz, hogy a fixpontok halmaza egy görbe legyen, az kell, hogy a $\mathrm{T}(x,y)=x$, $\mathrm{U}(x,y)=y$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása legyen.

4.3.1. Egy csúcson átmenő, a szemközti oldalt metsző görbék

A 4.2. fejezetben fellépő egyenesekre vezető paraméterek által definiált problémában a „görbe menti” mozgásról szóló érvelés csak azon múlt, hogy igaz volt a $\mathrm{T}(x, y) = x$ azonosság. Ha tehát a táblázatot a következő speciális módon töltjük ki:

$p_{xx\|x}$	$p_{xx\|y}$	$p_{yy\|x}$	$p_{yy\|y}$	$p_{zz\|x}$	$p_{zz\|y}$	$p_{xy\|x}$	$p_{xy\|y}$	$p_{xz\|x}$	$p_{xz\|y}$	$p_{yz\|x}$	$p_{yz\|y}$
1	0	0	d	0	f	$1/2$	h	$1/2$	j	0	l

valamilyen $0 \leq d, f, l \leq 1$, $0 \leq h, j \leq 1/2$ paraméterek mellett, akkor a $T(x, y) = x$ azonosság miatt az $\begin{pmatrix} X_t^{(N)} \\ Y_t^{(N)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)} \\ Y_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)} \end{pmatrix}$ folytonosítással a határfolyamat első koordinátáját a Wright - Fisher egyenlet írja le, ld. a 4.2. fejezet érvelését.

4.3.2. Két csúcson átmenő görbék

Nyilvánvalóan görbét eredményez az a paramétermegadás, amikor a $\mathrm{T}(x, y) - x$ és az $\mathrm{U}(x, y) - y$ polinomok minden tagja teljesen megegyezik, ilyenkor a görbe két végpontja a háromszögnek a csupa x színű és a csupa y színű állapotot jelző csúcsai. Egy egyszerű lineáris egyenletrendszert megoldva, figyelembevéve a paraméterek értéktartományát, ez akkor lép fel, ha a 4.3. fejezetben szereplő táblázat a következő alakú:

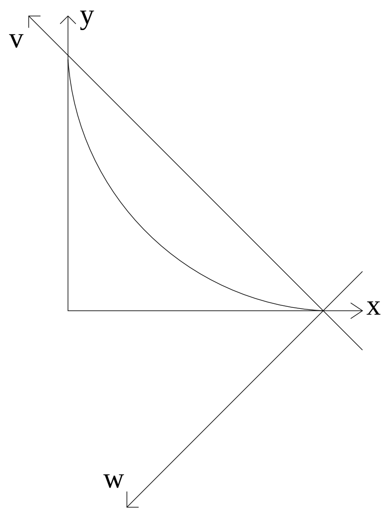
$p_{xx\|x}$	$p_{xx\|y}$	$p_{yy\|x}$	$p_{yy\|y}$	$p_{zz\|x}$	$p_{zz\|y}$	$p_{xy\|x}$	$p_{xy\|y}$	$p_{xz\|x}$	$p_{xz\|y}$	$p_{yz\|x}$	$p_{yz\|y}$
1	0	0	1	e	e	g	g	i	$i - 1/2$	$l - 1/2$	l

ahol $0 \leq e, g \leq 1/2$ és $1/2 \leq i, l \leq 3/4$.

Ilyenkor a fix görbe egyszerű $y = f(x)$ függvény alakban írható fel, és az $(x, y) \mapsto (\mathrm{T}(x, y), \mathrm{U}(x, y))$ leképezésre igaz az, hogy

$$y - x = \mathrm{U}(x, y) - \mathrm{T}(x, y),$$

vagyis a leképezés „iránya” merőleges az $y = -x + 1$ egyenletű egyenesre. Innen adódik a gondolat, hogy az x, y koordinátarendszer helyett a 8. ábrán látható v, w koordinátarendszerre térjünk át, ott remélhető, hogy a 4.2. fejezetben látott módon egyszerű merőleges vetítéssel külön le tudjuk írni a kétféle mozgást: a görbe mentit és a görbétől való eltérést.



8. ábra. A régi xy és az új vw koordinátarendszer

Az áttérést az

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y - x + 1 \\ -y - x + 1 \end{pmatrix}$$

transzformáció jelenti, az új koordinátarendszerben az f függvény megfelelője is könnyen felírható, jelölje g. Az elkövetkezőkben $(V_k^{(N)}, W_k^{(N)})$ fogja jelölni az $(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)})$ pont új koordinátáit, azaz

$$\sqrt{2}V_k^{(N)} := Y_k^{(N)} - X_k^{(N)} + 1 \text{ és}$$

$$\sqrt{2}W_k^{(N)} := -Y_k^{(N)} - X_k^{(N)} + 1.$$

Egy speciális eset. Egy speciális esettel foglalkozunk, mind a 12 paraméternek konkrét értéket adunk, mégpedig nagyon szimmetrikus (de azért valódi görbét eredményező) módon. A táblázat legyen

$p_{xx\|x}$	$p_{xx\|y}$	$p_{yy\|x}$	$p_{yy\|y}$	$p_{zz\|x}$	$p_{zz\|y}$	$p_{xy\|x}$	$p_{xy\|y}$	$p_{xz\|x}$	$p_{xz\|y}$	$p_{yz\|x}$	$p_{yz\|y}$
1	0	0	1	1/4	1/4	0	0	1/2	0	0	1/2

Ilyenkor f és g könnyen felírhatóak: $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$, $g(v) = -\frac{1}{\sqrt{2}}v^2 + v$.

Megjegyzés: Ezeket a számértékeket biológiai ihletés alapján választottuk: ha a dobozra mint egyedek egy változatlan N méretű populációjára gondolnánk, az élőlények diploidok volnának, és egyneműek, akkor arra gondolhatnánk, hogy egy bizonyos génjük alapján (melynek két allélja létezne,

A és a) színezzük az egyedeket három színűre (x színt kapna egy egyed, ha AA, y színt, ha aa és z színt, ha Aa genotípusú volna). A következő doboz feltöltése ekkor (át nem fedő generációkat feltételezve) a populáció megváltozását jelentené: a következő generáció úgy jönne létre, hogy az előzőből véletlenszerűen N szülőpár képződne, 1-1 utódot létrehozva (egy szülő több párban is szerepelhetne). Feltételeznünk kéne azt is, hogy nincs mutáció, valamint hogy egy Aa szülő azonos valószínűséggel ad A illetve a gént az utódának. Az ilyenkor a modellünkben fellépő fixpontok görbéje a determinisztikus modellekből ismert Hardy - Weinberg-parabola.

A görbe menti mozgás:

A 4.2.1. fejezetben látottak megfelelője igaz: ha az új koordinátarendszerben felírt folyamatot folytonosítjuk a

$$\begin{pmatrix} V_t^{(N)} \\ W_t^{(N)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)} \\ W_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)} \end{pmatrix}$$

definícióval, akkor a határfolyamat első koordinátája a Wright - Fisher egyenlet szerint mozog, igaz az alábbi tétel:

7. Tétel. $\begin{pmatrix} V_t^{(N)} \\ W_t^{(N)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_t \\ W_t \end{pmatrix}$, ahol V_t kielégíti a Wright - Fisher egyenlet alábbi megfelelőjét:

$$\mathrm{d}V_t = \sqrt{V_t(\sqrt{2} - V_t)}\mathrm{d}B_t.$$

(A módosítás abból adódik, hogy $V_k^{(N)}$ értékkészlete a $[0, \sqrt{2}]$ intervallum.)

Bizonyítás. A v tengelyre vetített pont mozgása vizsgálatának érdekében írjuk a következőket:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}V_{k+1}^{(N)} &= Y_{k+1}^{(N)} - X_{k+1}^{(N)} + 1 = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(\boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[2] - \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1] - \mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) + \mathrm{T}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)})\Big) + \\
&\qquad + \mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) - \mathrm{T}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) + 1 = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(Z_{k,j}^{(N)} - \mathbb{E}(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)})\Big) + \sqrt{2}V_k^{(N)},
\end{aligned}$$

ahol bevezettük a $Z_{k,j}^{(N)} := \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[2] - \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1]$ jelölést. Ezekre

$$Z_{k,j}^{(N)} = \begin{cases} -1, & \text{ha pirosat teszünk be,} \\ 1, & \text{ha kéket teszünk be,} \\ 0, & \text{ha sárgát teszünk be,} \end{cases}$$

a piros betételének fetételes valószínűsége $\mathrm{T}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)})$, a kéké $\mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)})$. Így $Z_{k,j}^{(N)}$ feltételes várható értéke

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) = \mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) - \mathrm{T}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) = \\ = Y_k^{(N)} - X_k^{(N)} = \sqrt{2}V_k^{(N)} - 1,\end{aligned}$$

feltételes szórásnégyzete könnyen számolható (itt nem részletezett) módon

$$\mathbb{D}^2(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) = 2V_k^{(N)}(\sqrt{2} - V_k^{(N)}).$$

(Ebben a számolásban azt használjuk ki, hogy a $(\mathrm{T}(x,y), \mathrm{U}(x,y))$ pont rajta van a görbén, azaz $\mathrm{U}(x,y) = f(\mathrm{T}(x,y))$.)

Így $\mathrm{U}(x,y) - \mathrm{T}(x,y) = y - x$ használatával, bevezetve az $F(v) = v(\sqrt{2} - v)$ függvényt,

$$\sqrt{2}(V_{k+1}^{(N)} - V_k^{(N)}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{2}\sqrt{F(V_k^{(N)})}\frac{\sum_{j=1}^{N}\left(Z_{k,j}^{(N)} - \mathbb{E}(Z_{k,j}^{(N)} \mid V_k^{(N)})\right)}{\sqrt{N}\sqrt{F(V_k^{(N)})}}.$$

A viselkedésre tehát ebből az egyenletből következtetünk, bizonyítása a martingál-problémát használva a 3. fejezetben látottakhoz hasonlóan történik.

■

A görbétől való eltérés:

Indítsuk az (átparaméterezett) folyamat első koordinátáját egy előre rögzített v_0 ponttól $O(1/N)$ távolságból, a második koordinátát pedig $g(V_0^{(N)})$-tól $O(1/\sqrt{N})$ távolságból.

Jelölje $S_k^{(N)}$ a k időpontbeli, új koordinátarendszerben második koordináta eltérését a fix görbe megfelelő pontjának második koordinátájától:

$$S_k^{(N)} := W_k^{(N)} - g(V_k^{(N)}),$$

ennek $\sqrt{N}$-szeresét pedig jelöljük $\xi_k^{(N)}$-val:

$$\xi_k^{(N)} := \sqrt{N}S_k^{(N)}.$$

8. Tétel. A fenti indítási feltétel és paraméterek mellett $\xi_k^{(N)} \Rightarrow \xi_k$, ahol

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_{k+1} = \sqrt{g(v_0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - g(v_0)\right)} Q_{k+1},$$

itt Q_j-k egymástól és minden más értéktől független standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Megjegyzés: vegyük észre, hogy a paraméterek speciális választása miatt vagyunk ebben a helyzetben, azaz azért, mert bármely pontból indulva a következő pont várható értéke rajta van a görbén, ld. a 4.2.2. fejezetben szereplő tétel utáni megjegyzést. Ha kevésbé speciális görbét vizsgálnánk (ugyanezen a két csúcson átmenőt), akkor „valódi" Ornstein - Uhlenbeck folyamatot kapnánk, ξ_{k+1} függne ξ_k-tól is.

Bizonyítás. Írjuk fel $S_{k+1}^{(N)}$-et a következőképpen:

$$\sqrt{2}S_{k+1}^{(N)} = -Y_{k+1}^{(N)} - X_{k+1}^{(N)} + 1 - \sqrt{2}g(V_k^{(N)}) - \sqrt{2}(g(V_{k+1}^{(N)}) - g(V_k^{(N)})) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{2}\sqrt{F(V_k^{(N)})}\frac{\sum_{j=1}^N \left(Z_{k,j}^{(N)} - \mathbb{E}(Z_{k,j}^{(N)} \mid V_k^{(N)})\right)}{\sqrt{N}\mathbb{D}(Z_{k,j}^{(N)} \mid V_k^{(N)})} - \sqrt{2}\left(g(V_{k+1}^{(N)}) - g(V_k^{(N)})\right), \tag{18}$$

ahol bevezettük az $F(v) = g(v)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - g(v)\right)$ függvényt és a $Z_{k,j}^{(N)} := \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[1] + \boldsymbol{\rho}_{k,j}^{(N)}[2]$ változókat, melyek értéke

$$Z_{k,j}^{(N)} = \begin{cases} 1, & \text{ha pirosat vagy kéket teszünk be,} \\ 0, & \text{ha sárgát teszünk be.} \end{cases}$$

Feltételes várható értékük és feltételes szórásnégyzetük könnyen számolható módon

$$\mathbb{E}(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) = \mathrm{T}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) + \mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) = 1 - \sqrt{2}g(V_k^{(N)}),$$

illetve

$$\mathbb{D}^2\left(Z_{k,j}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}\right) = 2g(V_k^{(N)})\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - g(V_k^{(N)})\right) = 2F(V_k^{(N)}).$$

A nem részletezett számolásban kihasználtuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(W_{k+1}^{(N)} \mid X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathrm{U}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) - \mathrm{T}(X_k^{(N)}, Y_k^{(N)}) + 1) = g(V_k^{(N)}),$$

azaz hogy a várható érték a paraméterek speciális választása folytán egy lépésben a görbére esik.

Visszatérve (18)-ra, megszorozva mindkét oldalt $\sqrt{N}$-nel, azt látjuk tehát, hogy

$$\xi_{k+1}^{(N)} = -\sqrt{F(V_k^{(N)})}Q_{k+1}^{(N)} - \sqrt{N}\left(g(V_{k+1}^{(N)}) - g(V_k^{(N)})\right) =$$
$$= -\sqrt{F(v_0)}Q_{k+1}^{(N)} - H_{V_k^{(N)}}Q_{k+1}^{(N)} - \sqrt{(N)}\left(g(V_{k+1}^{(N)}) - g(V_k^{(N)})\right),$$

itt $Q_{k+1}^{(N)}$ gyengén konvergál egy minden eddigitől független standard normális eloszlású változóhoz, a két hibatag pedig valószínűségben konvergál 0-hoz:

Az első hibatagban $H_{V_k^{(N)}}$ a $\sqrt{F(v)}$ függvény v_0 körüli Taylor-sorfejtéséből adódik. Felhasználva, hogy $\mathbb{D}^2(V_k^{(N)} - v_0) = O(1/\sqrt{N})$ (ugyanúgy, mint azt (17)-ben kaptuk), annak valószínűsége, hogy abszolútértéke egy rögzített $\varepsilon > 0$ számnál nagyobb, 0-hoz tartó fügvénnyel becsülhető.

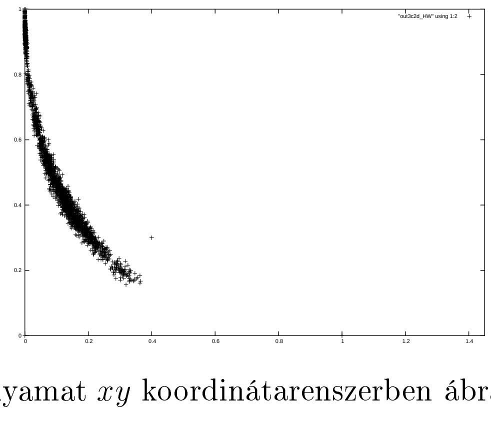
A második hibatag abszolútértéke

$$\sqrt{N}\left|g(V_{k+1}^{(N)}) - g(V_k^{(N)})\right| \leq \sqrt{N}\left|g(V_{k+1}^{(N)}) - g(v_0)\right| + \sqrt{N}\left|g(V_k^{(N)}) - g(v_0)\right|,$$

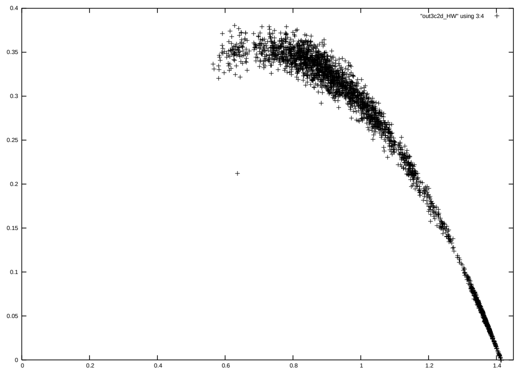
ez tehát g Taylor-sorfejtését használva hasomlóan becsülhető.

■

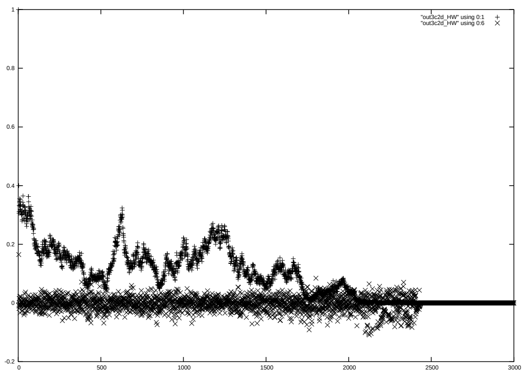
A következő ábrákon az átparaméterezés eredményét követhetjük figyelemmel. A 9. és a 10. ábrán az xy illetve a vw koordinátarendszerben látjuk a (nagyjából a görbe mentén elhelyezkedő) pontokat, míg a 11. és a 12. ábrákon azt figyelhetjük meg, hogy az x (illetve v) koordináta mozgásával egyidőben hogyan változik az $y - f(x)$ (illetve a $w - g(v)$) érték.



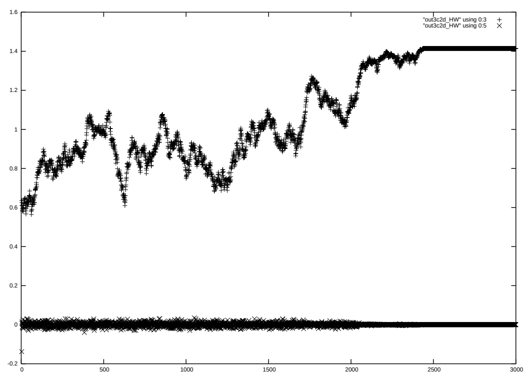
9. ábra. A folyamat xy koordinátarenszerben ábrázolt mozgása



10. ábra. Az uv koordinátarenszerben ábrázolt mozgás



11. ábra. A vízszintes tengelyen látható az idő, függőlegesen az x koordináta és az $y - f(x)$ fluktuáció



12. ábra. Vízszintes tengelyen: idő, függőleges tengelyen: u koordináta és a $w - g(u)$ fluktuáció

5. Összefoglalás

A dolgozatban a Wright - Fisher modell különböző változatait vizsgáltuk az $N \to \infty$ határátmenetben. A különböző fejezetekben a kétféle alapvető viselkedést és ezek együttes megjelenését írtuk le:

A bevezetésben bemutattuk az alapmodellt, vázoltuk a változtatási pontokat, megfogalmaztuk a kérdéseket, bevezettük a problémáink osztályozásakor alapvető *fixpontok* fogalmát. Ezután bemutattuk a későbbiekben használt matematikai eszközt, a martingál-módszert, illetve az egzisztencia és unicitási tétel általunk használt speciális esetét, majd előrevetítettük a harmadik fejezet bizonyítási módszerét.

A második fejezetben azokat az eseteket tárgyaltuk, amikor egyetlen fixpont létezik, x^*. A fluktuációk vizsgálatának érdekében bevezettük a $\xi_k^N := \sqrt{N}(X_k^{(N)} - x^*)$ változót. 2 szín esetén 1 illetve 2 húzás, tetszőleges d színszám esetén 1 húzás mellett bebizonyítottuk, hogy $\xi_k^{(N)} \Rightarrow \xi_k$, ahol ξ_k diszkrét idejű, 0-ból indított Ornstein - Uhlenbeck folyamat:

$$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_{k+1} = \alpha\xi_k + \beta Y_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Itt α és β d szín esetén $(d-1) \times (d-1)$-dimenziós mátrixok, α kontrakció, Y_{k+1}-ek pedig független, $(d-1)$-dimenziós független komponensű standard normális eloszlású vektorváltozók.

A harmadik fejezetben a fixpontok halmaza az egész állapottér, ekkor az eredetileg diszkrét idejű $\tilde{X}_k^{(N)}$ folyamatot folytonosítottuk az $X_t^{(N)} := \tilde{X}_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)}$ definíció segítségével. A martingál-probléma módszerével bebizonyítottuk (a megfelelő feszességi feltétel teljesülésétől eltekintve), hogy $X_t^{(N)} \Rightarrow X_t$, ahol X_t egyértelmű megoldása a

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t$$

Wright - Fisher egyenletnek, itt σ az a $(d-1)\times(d-1)$-es szimmetrikus mátrix, melyre $\sigma\sigma^T = a$, $a_{ij}(X_t) = X_t[i](\delta_{ij} - X_t[j])$.

A negyedik fejezetben vizsgált esetekben a fixpontok halmaza (3 szín esetén) egy egyenes, illetve egy másodfokú görbe. Megfelelő koordinátázás mellett elkülöníthető a *görbe menti mozgás* és a *görbétől való eltérés (fluktuáció)*. E két mozgás gyorsasága nem összemérhető: az egy lépésben való elmozdulás nagyságrendje az első esetben $1/N$, a második esetben $1/\sqrt{N}$. A fluktuáció 2. fejezetben látott módon vizsgált határfolyamata diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamat. A görbe menti mozgást a 3. fejezet módszerével folytonosítva, ennek határfolyamata a Wright - Fisher egyenlet (illetve megfelelő változata) szerint mozog. E két állítást egyenes, illetve egy speciális görbe (az ún. Hardy - Weinberg parabola) esetén bizonyítottuk, az egyéb görbék közül egy speciális osztályra megmutattuk a második állítást.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani elsősorban témavezetőmnek, Tóth Bálintnak, kedves támogatásáért, szakmai útbaigazításaiért, magyarázataiért és azért, hogy mindig szakított időt a velem és a dolgozattal való foglalkozásra.

Köszönettel tartozom Helle Zitának, valamint a sztochasztika szakirányon tanuló barátaimnak, Vető Katának, Felszeghy Bálintnak, Rácz Balázsnak és Tóth Istvánnak, amiért a munka egy még alakuló fázisában meghallgattak, és véleményeikkel segítettek a dolgozat befejezésében.

Ezen kívül köszönet illeti általános iskolai és gimnáziumi matematika tanáraimat, Szabó Anikót és Pósfai Péternét, akiktől a matemaikai problémák iránti érdeklődésemhez kaphattam további lelkesedést.

Családomnak köszönöm a mindenkori bíztatást.

Hivatkozások

[1] Daniel W. Stroock, S. R. Srinivasa Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, 1979.

[2] Patrick Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, 1999.

[3] Richard Durrett, *Probability models for DNA sequence evolution*, Springer-Verlag, 2002.

[4] Stewart N. Ethier, Thomas G. Kurtz, *Markov processes - Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons, 1986.

[5] K. L. Chung, R. J. Williams, *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhäuser, 1990.