KIVONAT

Rudas Anna: Határeloszlás-tételek urnamodellekben c. szakdolgozatáról

A dolgozatban a Wright - Fisher modell különböző változatait vizsgáltuk az $N \to \infty$ határátmenetben. A különböző fejezetekben a kétféle alapvető viselkedést és ezek együttes megjelenését írtuk le:

A bevezetésben bemutattuk az alapmodellt, vázoltuk a változtatási pontokat, megfogalmaztuk a kérdéseket, bevezettük a problémáink osztályozásakor alapvető *fixpontok* fogalmát. Ezután bemutattuk a későbbiekben használt matematikai eszközt, a martingál-módszert, illetve az egzisztencia és unicitási tétel általunk használt speciális esetét, majd előrevetítettük a harmadik fejezet bizonyítási módszerét.

A második fejezetben azokat az eseteket tárgyaltuk, amikor egyetlen fixpont létezik, x^*. A fluktuációk vizsgálatának érdekében bevezettük a $\xi_k^N := \sqrt{N}(X_k^{(N)} - x^*)$ változót. 2 szín esetén 1 illetve 2 húzás, tetszőleges d színszám esetén 1 húzás mellett bebizonyítottuk, hogy $\xi_k^{(N)} \Rightarrow \xi_k$, ahol ξ_k diszkrét idejű, 0-ból indított Ornstein - Uhlenbeck folyamat:

$$\xi_0 \equiv 0, \quad \xi_{k+1} = \alpha\xi_k + \beta Y_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Itt α és β d szín esetén $(d-1)\times(d-1)$-dimenziós mátrixok, α kontrakció, Y_{k+1}-ek pedig független, $(d-1)$-dimenziós független komponensű standard normális eloszlású vektorváltozók.

A harmadik fejezetben a fixpontok halmaza az egész állapottér, ekkor az eredetileg diszkrét idejű $\tilde{X}_k^{(N)}$ folyamatot folytonosítottuk az $X_t^{(N)} := \tilde{X}_{\lfloor Nt \rfloor}^{(N)}$ definíció segítségével. A martingál-probléma módszerével bebizonyítottuk (a megfelelő feszességi feltétel teljesülésétől eltekintve), hogy $X_t^{(N)} \Rightarrow X_t$, ahol X_t egyértelmű megoldása a

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t$$

Wright - Fisher egyenletnek, itt σ az a $(d-1)\times(d-1)$-es szimmetrikus mátrix, melyre $\sigma\sigma^T = a$, $a_{ij}(X_t) = X_t[i](\delta_{ij} - X_t[j])$.

A negyedik fejezetben vizsgált esetekben a fixpontok halmaza (3 szín esetén) egy egyenes, illetve egy másodfokú görbe. Megfelelő koordinátázás mellett elkülöníthető a *görbe menti mozgás* és a *görbétől való eltérés (fluktuáció)*. E két mozgás gyorsasága nem összemérhető: az egy lépésben való elmozdulás nagyságrendje az első esetben $1/N$, a második esetben $1/\sqrt{N}$. A fluktuáció 2. fejezetben látott módon vizsgált határfolyamata diszkrét idejű Ornstein - Uhlenbeck folyamat. A görbe menti mozgást a 3. fejezet módszerével folytonosítva, ennek határfolyamata a Wright - Fisher egyenlet (illetve megfelelő változata) szerint mozog. E két állítást egyenes, illetve egy speciális görbe (az ún. Hardy - Weinberg parabola) esetén bizonyítottuk, az egyéb görbék közül egy speciális osztályra megmutattuk a második állítást.