A Bernoulli-konvolúcióról *

Rudas Anna

2002. május 4.

Tartalomjegyzék

1. Az alapprobléma és az első eredmények **2**
1.1. Megközelítési módok 2
1.1.1. A mérték Fourier-transzformáltja 2
1.1.2. Iterált függvényrendszerhez tartozó önhasonló mérték . 3
1.1.3. ν_λ mint ,,push-down" mérték 3
1.2. A legfőbb kérdés 3
1.2.1. $\lambda \in (0, 1/2)$ esetén ν_λ szinguláris 3
1.2.2. Erdős eredményei a $\lambda \in (1/2, 1)$ esettel kapcsolatban . 4
1.2.3. A ν_λ mérték dimenziójáról 4
1.2.4. A ,,{0,1,3}"-problémáról 4

2. Solomyak tétele **5**
2.1. A bizonyítás menetének vázlatos ismertetése 5
2.2. A segédtétel bizonyításának menete 6

3. Alkalmazások **9**
3.1. ,,Fat baker"-transzformáció 9
3.2. Fraktál grafikonok 9

*Beszámoló az olvasott cikkekről

1. Az alapprobléma és az első eredmények

Legyen $\lambda \in (0,1)$, és definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_i \lambda^i,$$

ahol θ_i független valószínűségi változók: $1/2 - 1/2$ valószínűséggel veszik fel értékeiket a $\{-1,1\}$ halmazból. Y_λ eloszlását jelölje ν_λ. Ez a mérték az $\frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^n} + \delta_{\lambda^n}), \quad n \in \mathbb{N}$ mértékek végtelen konvolúciója, innen az elnevezés. A '30-as évektől kezdve sokan tanulmányozták e mértéket, és meglepő kapcsolatait fedezték fel többek között az algebrai számok elméletével, dinamikus rendszerekkel és Hausdorff-dimenzióra vonatkozó becslésekkel.

1.1. Megközelítési módok

Y_λ -ra különféle módokon tekinthetünk, ezek segíthetnek rámutatni a fent említett kapcsolódási pontokra.

1.1.1. A mérték Fourier-transzformáltja

Vegyük észre, hogy ν_λ Fourier-transzformáltja egyszerűen számolható: vezessük be a $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$ Bernoulli-mértéket az $\Omega = \{1, -1\}^{\mathbb{N}}$ halmazon, ezzel (a függetlenség miatt)

$$\hat{\nu_\lambda}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \mathrm{d}\nu_\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{\infty} e^{i\xi\theta_n\lambda^n} \mathrm{d}\mu(\bar{\theta}) =$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{i\xi\theta_n\lambda^n}) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\xi\lambda^n} + e^{-i\xi\lambda^n}}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda^n\xi),$$

összefoglalva:

$$\hat{\nu_\lambda}(\xi) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda^n \xi). \tag{1}$$

Ez a formula számelméleti kapcsolódást jelent, ugyanakkor a később idézett Solomyak-féle tétel bizonyításakor is hivatkozunk rá.

1.1.2. Iterált függvényrendszerhez tartozó önhasonló mérték

ν_λ eloszlásfüggvényét meghatározza a rá vonatkozó következő függvényegyenlet:

$$F_\lambda(x) = \nu_\lambda(-\infty, x] = \frac{1}{2}\left[F_\lambda(\frac{x-1}{\lambda}) + F_\lambda(\frac{x+1}{\lambda})\right],$$

másképpen szólva ν_λ az $\{\lambda x - 1, \lambda x + 1\}$ iterált függvényrendszerhez tartozó mérték (a függvények közül $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel választva). Ez az észrevétel dinamikai rendszerek vizsgálatakor és dimenzióbecslés esetén hasznos.

1.1.3. ν_λ mint „push-down" mérték

Legyen

$$\Pi_\lambda(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \lambda^n,$$

ekkor az 1.1.1. fejezetben definiált Ω és μ segítségével írhatjuk, hogy

$$\nu_\lambda = \mu \circ \Pi_\lambda^{-1}.$$

Ez a reprezentáció a ν_λ -val kapcsolatos legújabb vizsgálatok során hasznos, amely vizsgálatok geometriai mértékelméleti módszereket használnak.

1.2. A legfőbb kérdés

A ν_λ mértékre vonatkozó legfőbb kérdés az, hogy mely $\lambda \in (0,1)$ esetén abszolút folytonos, és mely λ -k esetén szinguláris a Lebesgue-mértékre nézve. Azt, hogy bármely, diszkrét mértékek konvergens végtelen konvolúciójaként előálló mérték esetén csak e két eset valamelyike állhat fenn, Jessen és Wintner 1935-ben bizonyította. Ahol ν_λ abszolút folytonos, ott a sűrűségfüggvény simasága, ahol szinguláris, ott pedig a mérték dimenziója képezi további vizsgálat tárgyát $(\dim \nu = \inf \{ \dim A : A \,\text{Borel}, \quad \nu(\mathbb{R} \backslash A) = 0 \})$.

1.2.1. $\lambda \in (0, 1/2)$ esetén ν_λ szinguláris

Ha $\lambda \in (0, 1/2)$, akkor látható, hogy a mérték tartója egy Cantor-halmaz: az első „lépésben" $(+1)$ vagy (-1) középpontú, $\frac{2\lambda}{1-\lambda}$ -hosszú szakaszokra jutunk, a másodikban $(1 \pm \lambda)$ vagy $(-1 \pm \lambda)$ középpontú és $\frac{2\lambda^2}{1-\lambda}$ -hosszú szakaszokra, stb., minden lépésben a szakasz hossza λ -szorosra változik, és ezek éppen akkor diszjunktak, ha $\lambda < 1/2$. Ebben az esetben tehát a ν_λ mérték tartója Cantor-halmaz, ami nulla Lebesgue-mértékű, azaz ν_λ szinguláris. (A $\lambda = 1/2$ esetben az egyenletes eloszlást kapjuk.)

1.2.2. Erdős eredményei a $\lambda \in (1/2, 1)$ esettel kapcsolatban

Legyen $S_\perp = \{ \lambda \in (1/2, 1) : \nu_\lambda \text{ szinguláris} \}$. E halmaz elemei közül jelenleg csak azok ismertek, amelyeket Erdős Pál talált 1939-ben: ha $\lambda \in (1/2, 1)$ és λ^{-1} ún. Pisot-szám, akkor $\lambda \in S_\perp$. Pisot-számnak nevezzük azokat az algebrai számokat, melyeknek konjugáltjai (azaz minimálpolinomjának többi gyökei) abszolútértékben mind kisebbek 1-nél (ilyen például az aranymetszés $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ -ös aránya). Hogy van-e más eleme $S_\perp$-nek, az nyitott kérdés.

Erdős másik eredménye, hogy $\exists\, a < 1$, amire $S_\perp \cap (a, 1)$ nulla Lebesgue-mértékű. Ennél azonban valójában sokkal több igaz, amint azt a 2. fejezetben látjuk majd.

1.2.3. A ν_λ mérték dimenziójáról

Peres, Schlag és Solomyak bizonyította, hogy minden $\lambda \in (0, 1)$ -re létezik ν_λ -nak ún. korrelációs dimenziója. Ez tetszőleges ν mérték esetén a következőképpen definiált:

$$C_2(\nu) = \lim_{r \to 0} \frac{\log(\nu \times \nu)\{ (x, y) : |x - y| \leq r \}}{\log r}.$$

Ennek létezéséből levezethető, hogy a $\{ \lambda \in (1/2, 1) : C_2(\nu_\lambda) = 1 \}$ halmaz sűrű G_δ halmaz $(1/2, 1)$ -ben. Innen egyből következik, hogy a $\{ \lambda \in (1/2, 1) : \dim(\nu_\lambda) = 1 \}$ halmaz reziduális $(1/2, 1)$ -ben (tartalmaz sűrű G_δ halmazt, hiszen $\dim \nu \geq C_2(\nu)$ minden ν mértékre teljesül).

1.2.4. A „{0,1,3}”-problémáról

Keane és Smorodinsky a '90-es évek elején kezdték vizsgálni, hogy hogyan függ a $\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \; a_n \in \{ 0, 1, 3 \} \}$ halmaz dimenziója λ -tól. Pollicott és Simon Károly 1995-ben bebizonyította, hogy a halmaz Hausdorff-dimenziója majdnem minden $\lambda \in (1/4, 1/3)$ esetén megegyezik a hasonlósági dimenziójával. Ehhez a $\{ 0, 1, 3 \}$ halmazból értékeiket egyenlő eséllyel felvevő véletlen a_n -eket, és az így adódó önhasonló mértéket használták. Fontos eszköznek bizonyult a legújabb vizsgálatok során az általuk használt *transzverzalitás* fogalma, erről is lesz szó a 2. fejezetben.

2. Solomyak tétele

1995-ben Boris Solomyak bebizonyította, hogy majdnem minden $\lambda \in (1/2, 1)$ -re igaz, hogy a ν_λ mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, és a sűrűségfüggvény L^2-beli.

2.1. A bizonyítás menetének vázlatos ismertetése

Fourier-transzformáltas trükk:

Ha egy ν valószínűségi mérték Fourier-transzformáltja L^2-beli, akkor a mérték abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, és a sűrűségfüggvény is L^2-beli. Elég tehát a mérték Fourier-transzformáltjára koncentrálni. Tegyük fel, hogy a tételt már bizonyítottuk az $(1/2, 1/\sqrt{2})$ intervallumra. A következő észrevétel segítségével belátjuk, hogy ekkor már a teljes $(1/2, 1)$ intervallumra is igaz. A bevezetésbeli (1) képlet alapján a mérték Fourier-transzformáltját bármely $k \geq 2$ egész esetén felírhatjuk a következő alakban:

$$\hat{\nu}_\lambda(u) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda^n u) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda^{kn} u) \cos(\lambda^{kn+1} u) \ldots \cos(\lambda^{kn+k-1} u) =$$

$$= \hat{\nu}_{\lambda^k}(u) \hat{\nu}_{\lambda^k}(\lambda u) \ldots \hat{\nu}_{\lambda^k}(\lambda^{k-1} u).$$

Például $(k = 2)$ -re alkalmazva azt kapjuk ebből, hogy ha $\lambda \in (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$, akkor $\lambda \in (1/2, 1/\sqrt{2})$ miatt a jobb oldalon álló mindkét függvény L^2 -beli, így $\hat{\nu}_\lambda$ is az. Ugyanígy $\forall k \geq 2$ -re $\lambda \in (2^{-1/k}, 2^{-2/k})$ esetén $\hat{\nu}_\lambda \in L^2$, ezek az intervallumok pedig lefedik $(1/\sqrt{2}, 1)$ -et. Hátra van tehát az $(1/2, 1/\sqrt{2})$ -re való bizonyítás.

Transzverzalitás:

Y_λ tekinthető egy $g(\lambda)$ függvénynek, ha rögzítjük a $\theta_i = g_i$ együtthatókat, azaz egy rögzített véletlen kimenetelt vizsgálunk:

$$g(\lambda) = \sum_{i \in I} g_i \lambda^i.$$

Azt mondjuk, hogy két különböző kimenetelhez tartozó $g(x) \not\equiv h(x)$ függvény egymásra transzverzális, ha az $f(x) := g(x) - h(x)$ különbségfüggvényre igaz, hogy $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$. A 2.2 alfejezetben vázlatosan ismertetem a módot, ahogy Solomyak bizonyította azt a segédtételt, mely szerint ha a $[0, \alpha)$ intervallumon fennáll a transzverzalitás bármely két kimenetelhez tartozó függvény között, akkor majdnem minden $\lambda \in (\tau, \alpha)$ -ra a ν_λ mérték Fourier-transzformáltja (és így a sűrűségfüggvény is) L^2 -beli, ahol τ jelentése a 2.2. részből világos lesz. Ha fennállna a transzverzalitás az egész $(1/2, 1/\sqrt{2})$ intervallumon, akkor ezzel (és a Fourier-transzformáltas érveléssel) a bizonyítás teljes volna. Azonban ez nem így van: az Y_k konstrukcióval a transzverzalitás csak kb. 0.64 alatt igaz. Ahhoz, hogy ennél nagyobb λ-ra is célhoz érjünk, definiálunk egy új valószínűségi változót:

$$Z_\lambda = \sum_{i \neq 3j+2} \pm \lambda^i. \tag{2}$$

Ezzel egy kisebb függvényosztályhoz jutunk, mint Y_λ esetén, hiszen minden harmadik tagot elhagytuk. Így a zérushelyekre vonatkozó feltétel nagyobb intervallumon teljesül, pontosabban belátható, hogy Z_λ eloszlását η_λ -val jelölve $\hat{\eta}_\lambda \in L^2$ a $\lambda \in (4^{-1/3}, 1/\sqrt{2})$ intervallumon. A segédtétel persze önmagában nem elég, hiszen nem mond semmit α értékének megtalálásáról. α -t egy másik ötlet alapján lehet becsülni, ahol a szóban forgó hatványsorok zárt konvex burkát tekintik, mely lehetővé teszi a legkisebb dupla zérushellyel rendelkező függvény meghatározását. Ezzel a bizonyítás befejeződött, hiszen $|\hat{\nu}_\lambda(u)| \leq |\hat{\eta}_\lambda(u)|$, és így $\hat{\nu}_\lambda \in L^2$ majdnem minden $\lambda \in (1/2, 1/\sqrt{2})$ -re.

2.2. A segédtétel bizonyításának menete

Ezt a részt azért emelem ki a bizonyítás előbb leírt hosszú folyamából, mert segít megvilágítani, hogyan kapcsolódik ide a transzverzalitás fogalma.
Először néhány jelölés, definíció: Legyen

$$Y_\lambda^{D,I} = \sum_{i \in I} \theta_i \lambda^i,$$

ahol I egy olyan részhalmaza $\mathbb{Z}_+$ -nak, hogy valamilyen n természetes számra

$$i \geq 0 \quad \text{esetén} \quad i \in I \Leftrightarrow i + n \in I,$$

θ_i pedig független valószínűségi változók, amelyek a $\#D = m$ véges halmazból egyenletes $\frac{1}{m}$ valószínűségekkel veszik fel értékeiket. Legyen továbbá

$l = \#(I \cap [0, n-1])$. Most megfogalmazhatjuk pontosan a segédtételt:

Jelöljük α -val a legkisebb olyan számot, amelyre létezik olyan $g(x) \not\equiv 0$ hatványsor,

$$g(x) = \sum_{i \in I} g_i x^i, \quad g_i \in D - D,$$

amelyre $g(\alpha) = g'(\alpha) \neq 0$. Ekkor ($\tau := m^{-l/n} < \alpha$ esetén) majdnem minden $\lambda \in (\tau, \alpha)$ -ra teljesül, hogy $Y_\lambda^{D,I}$ eloszlása abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye L^2 -beli.

Megjegyzés A (2) -ben bevezetett Z_λ változó a $D = \{-1, 1\}$, $I = \{ i \in \mathbb{Z} : i \neq 3k+2 \}$ választásnak felel meg, erre $n = 3$, $m = 2$, $l = 2$, így $\tau = 4^{-1/3}$.

Legyen $\Sigma = D^I$, és ezen μ a D -n egyenletes diszkrét mértékek szorzata. Ha Π^λ a következő $\Sigma \to \mathbb{R}$ projekció:

$$\Pi^\lambda(s) = \sum_{i \in I} s_i \lambda^i,$$

akkor $Y_\lambda^{D,I}$ -hez tartozó η_λ eloszlás a μ mérték ,,push-down"-ja:

$$\eta_\lambda = \mu \circ (\Pi^\lambda)^{-1}.$$

Ha belátnánk, hogy bármely $\epsilon > 0$ -ra

$$\int_{\tau+\epsilon}^{\alpha-\epsilon} ||\hat{\eta}_\lambda||_2^2 \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\tau+\epsilon}^{\alpha-\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}_\lambda(x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\lambda < \infty,$$

akkor látnánk, hogy majdnem minden $\lambda \in (\tau+\epsilon, \alpha-\epsilon)$ -ra $||\hat{\eta}_\lambda||_2 < \infty$, azaz $\hat{\eta}_\lambda \in L^2$, így η_λ sűrűségfüggvénye L^2 -beli, és a bizonyítás végére érnénk. Találnunk kell tehát egy C kostanst, melyre minden p_0 esetén

$$\int_{\tau+\epsilon}^{\alpha-\epsilon} \int_{-p_0}^{p_0} |\hat{\eta}_\lambda(x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\lambda < C. \tag{3}$$

Egy változócserével áttérhetünk μ szerint való integrálásra:

$$|\hat{\eta}_\lambda(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(u-v)} \, \mathrm{d}\eta_\lambda(u) \, \mathrm{d}\eta_\lambda(v) =$$

$$= \int_\Sigma \int_\Sigma e^{ix(\Pi^\lambda(s)-\Pi^\lambda(t))}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s).$$

Integrálva $(-p_0, p_0)$ -on x szerint, felcserélve az integrálás sorrendjét kapjuk a

$$2\int_\Sigma \int_\Sigma \frac{\sin[p_0(\Pi_\lambda(s) - \Pi_\lambda(t))]}{\Pi_\lambda(s) - \Pi_\lambda(t)}\, \mathrm{d}\mu(t)\, \mathrm{d}\mu(s) \tag{4}$$

formulát, amit integrálva $(\tau+\epsilon, \alpha-\epsilon)$ -on λ szerint, szintén integrálási sorrend cserével láthatjuk, hogy valójában az

$$\int_{\tau+\lambda}^{\alpha-\epsilon} \frac{\sin[p_0(\Pi_\lambda(s) - \Pi_\lambda(t))]}{\Pi_\lambda(s) - \Pi_\lambda(t)} \mathrm{d}\lambda \tag{5}$$

integrált kell felülről jól becsülni, rögzített s, t mellett.
Legyen $T(\lambda) = \Pi_\lambda(s) - \Pi_\lambda(t)$. Ott lehet baj, ahol $T(\lambda)$ kicsi. Ha (4) -ben a t szerinti integrálást szétbontjuk aszerint, hogy $t \in \Sigma$ hány „jegyében" egyezik meg s -sel, akkor egy ilyen tartományon belül (ahol pontosan k jegyben egyeznek meg)

$$T(\lambda) = \sum_{i\in I}(s_i - t_i)\lambda^i = \lambda^k \sum_{i\in\sigma^k I}(s_{i+k} - t_{i+k})\lambda^i = \lambda^k \tilde{T}(\lambda),$$

ahol σ^k a k-val való balra tolás operátora. Egy lemma szerint van olyan $\delta(\epsilon)$ konstans, hogy ha g valamilyen j -re megegyezik az $Y_\lambda^{\Gamma,\sigma^j I}$ eltoltnak megfelelő függvénnyel, és $g(0) \neq 0$, akkor

$$(x \in [0, \alpha - \epsilon], |g(x)| < \delta) \Rightarrow |g'(x)| \geq \delta,$$

és itt $\tilde{T}(\lambda)$ épp ilyen. E lemma igazsága múlik α definícióján, azaz azon, hogy $[0, \alpha - \epsilon]$ -on belül nincs dupla zérushely (az s és t kimenetelhez tartozó két függvény transzverzális). Ha pedig ezt már tudjuk, akkor látható, hogy adott ϵ mellett a lemmából adódó δ szerint megfelelően kettébontva az (5) integrált, azon a tartományon is megfelelő becslést kapunk, ahol $T(\lambda)$ értéke kicsi. Összefoglalva végül p_0 -tól független konstans alá szoríthatjuk (3) -t, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. Alkalmazások

3.1. „Fat baker"-transzformáció

Alexander és Yorke 1984-ben a $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzet következő transzformációját vizsgálta:

$$T_\lambda(x,y) = \begin{cases} (\lambda x + (1-\lambda), 2y-1) & \text{ha} \quad y \geq 0, \\ (\lambda x - (1-\lambda), 2y+1) & \text{ha} \quad y < 0. \end{cases}$$

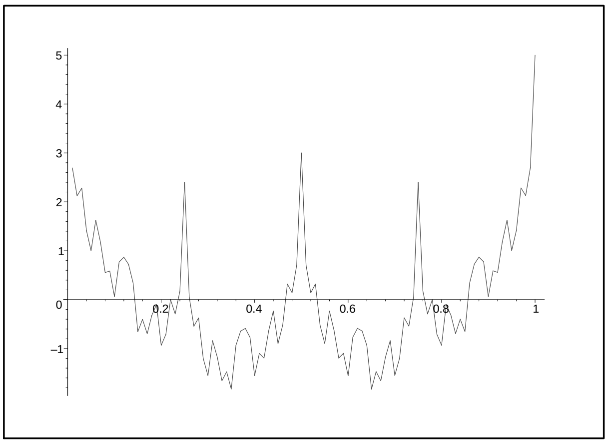
Ez a transzformáció a négyzet alsó felét tésztaszerűen megnyújtja és átsimítja a bal oldali, a felső felét pedig a jobb oldali részbe. Ha $\lambda \leq 1/2$, akkor (függőlegesen) spagettiszerűen elnyújtott, egymástól diszjunkt tartományok keletkeznek, és ilyenkor a T_λ -hoz tartozó η_λ mérték x vetületének tartója könnyen láthatóan ugyanaz, mint a ν_λ mérték $[-1,1]$ -re való $\tilde{\nu}_\lambda$ affin leképezésének tartója. A $\lambda > 1/2$ esetben a tartományok átlapolódnak, és bonyolultabb a kép. Valójában bebizonyították, hogy a η_λ ún. Sinai-Bowen-Ruelle mérték $\forall \lambda \in (0,1)$ -re megegyezik a $\tilde{\nu}_\lambda \times u$ mértékkel, ahol u az egyenletes eloszlás a $[-1,1]$ intervallumon.

3.2. Fraktál grafikonok

A Bernoulli-konvolúció egy másik érdekes példa vizsgálatakor is előbukkan. Legyen Φ egy $\mathbb{Z}$-periodikus függvény [ez azt jelenti, hogy $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad \Phi(x) = \Phi(x+k)$], és legyen $\lambda \in (1/2, 1)$. Definiáljuk a következő grafikont:

$$\Gamma_{\lambda,\Phi} = \{\, (x,y) : x \in [0,1] \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi(2^n x) \,\}.$$

A $\Phi(x) = \cos(2\pi x)$ választással élve sehol sem differenciálható függvények egy családjához jutunk. A következő ábrán például a $\lambda = 0.8$ esethez tartozó grafikon egy közelítése látható:



Még λ rögzített értékeire sem ismert $\dim \Gamma_{\lambda,\cos(2\pi x)}$ kiszámításának módja. Przytycki és Urbański a sokkal egyszerűbb

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x \in [0, 1/2) \quad \text{mod } 1, \\ -1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

esetben bebizonyította, hogy ha $\dim \nu_\lambda = 1$, akkor

$$\dim \Gamma_{\lambda,\Phi} = \dim_M \Gamma_{\lambda,\Phi} = 2 - \frac{\log(1/\lambda)}{\log 2},$$

ahol $\dim_M$ a box-dimenziót (Minkowski-dimenziót) jelöli. A jobb oldali egyenlőség minden $\lambda \in (1/2, 1)$ -re fennáll, azonban a Hausdorff-dimenzió lecsökken, amennyiben λ reciproka Pisot-szám. Itt nem ν_λ abszolút folytonossága játszik szerepet, hanem Hausdorff-dimenziója (az ide vonatkozó eredmények egy részét a 1.2.3. fejezetben ismertettem).

A két forráscikk adatai

Sixty Years of Bernoulli Convolutions

Yuval Peres, Wilhelm Schlag és Boris Solomyak cikke
[Solomyak honlapjáról letölthető:
http://www.math.washington.edu/ ˜ solomyak/PREPRINTS/fractal.html]

On the Random Series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdős problem)

Boris Solomyak cikke
[Annals of Mathematics, **142** (1995), p 611-625]